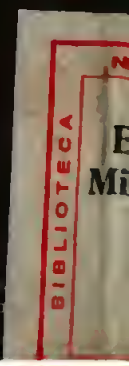

BIBLIOTECA

Erratum

Page 31 ligne 6 au lieu de :
PA > IB lire PA > IE
ligne 7 au lieu de PI > AB lire : PI > AE

680227

Digitized by Google

tiers égaux correspondent aux 5 polyèdres réguliers de la géométrie, et qu'il n'y en a pas d'autres.

2e Remarque — On pourrait croire qu'en n'assujetissant pas les polygones à être réguliers et égaux entre eux on pourrait disposer d'un plus grand nombre de manières des polygones d'un même nombre de côtés. Il n'en est rien. Pourvu que l'on s'assujetisse toujours à associer les polygones en même nombre autour d'un même sommet. Que les polygones soient réguliers ou non, qu'ils soient égaux ou non, la formule (1) et ses conséquences ont toujours lieu. Il suffit pour établir la formule (1) dans toute sa généralité de remarquer que le théorème d'Euler(1) s'applique à la sphère considérée comme un polyèdre à faces courbes dont les faces sont les polygones sphériques qui la recouvrent. De sorte que si nous désignons par S le nombre des sommets de ce polyèdre, par A le nombre de ses arêtes. Nous avons la relation :

$$S + m = A + 2 \qquad (2)$$

le nombre des faces étant m si nous conservons la même notation que tout à l'heure. Mais n et K désignant encore le nombre des côtés d'un polygone sphérique et le nombre des polygones associés autour d'un même sommet. Nous avons :

$$S = \frac{nm}{K} \qquad A = \frac{nm}{2}$$

substituant dans (2) nous retomberons sur la formule (1)

Mais s'il est démontré qu'il est impossible de recouvrir la sphère avec des exagones inégaux par exemple, et que si on se sert de pentagones il faut les associer 3 à 3, il reste à examiner si on peut prendre un premier pentagone au hazard, et le degré d'indétermination que présente la solution du problème ce premier pentagone une fois choisi. Mais ce sont là des questions fort délicates qui sortent des limites que nous sommes imposés. Je tenais simplement à montrer que la solution générale du problème n'est pas trouvée quand on a interprété les conséquences de la formule (1)

Fin des solutions de géométrie

(1) se rapporter à la 2e démonstration que nous avons donnée du théorème d'Euler.

Digitized by Google

$$m = \frac{8^d}{n(A-2^d)+4^d}$$

or nous avons :

$$\frac{A}{1^d} = \frac{4}{K}$$

donc :

$$m = \frac{4K}{2(n+K)-Kn} \quad (1)$$

examinons maintenant ce que devient cette formule pour les hypotheses diverses que l'on peut faire sur la nature du polygone. Si nous nous servons de triangles equilateraux, nous aurons:

$$n = 3$$

la formule (1) nous donne:

$$m = \frac{4K}{6-K}$$

m devant être un nombre entier, on ne peut donner à K que les valeurs: 3, 4, et 5 auxquelles correspondront pour m les valeurs:

$$m = 4 \qquad m = 8 \qquad m = 20$$

Pour $n=4$ on a:

$$m = \frac{2K}{4-K}$$

et on ne peut donner à K que la valeur 3 a qui donne:

$$m = 6$$

Pour $n=5$ La formule (1) donne:

$$m = \frac{4K}{10-3K}$$

et on ne peut encore donner à K que la valeur 3 qui nous donne $m=12$.

Pour $n=6$ la formule (1) devient

$$m = \frac{K}{3-K}$$

et on ne peut donner à K aucune valeur, il en est à fortiori de même pour $n>6$

« Ainsi on ne peut recouvrir que de 5 manières la sphère de polygones reguliers egaux, accouplés en même nombre autour d'un même sommet. »

1re Remarque — On sait qu'il existe 5 polyèdres reguliers, si on considère un polyedre regulier inscrit dans une sphère, et si on joint les sommets consecutifs 2 à 2 par des arcs de grand cercle, nous diviserons la sphère en polygones reguliers egaux. On voit donc que les 5 manières de diviser la sphère en polygones regu-

Digitized by Google

Question 109 — Déterminer un triangle sphérique isocèle et rectangle connaissant sa surface et le rayon de la sphère — déterminer un carré sphérique dans les mêmes conditions

---

Le problème revient à déterminer les deux angles égaux du triangle. Soit A leur valeur commune, S la surface donnée, T la surface du triangle trirectangle, la connaissance du rayon de la sphère nous permet de déterminer T que nous pouvons considérer comme connue. Cela posé l'expression de la surface d'un triangle sphérique nous donne la relation:

$$\frac{S}{T} = \frac{2A + 1^d - 2^d}{1^d} = \frac{2A - 1^d}{1^d}$$

d'où

$$A = \frac{S + T}{2T}$$

comme S peut varier entre 0 et $2T$, A peut lui-même varier entre $\frac{1^d}{2}$ et $\frac{3^d}{2}$.

On résoudra d'une manière analogue la question relative au carré sphérique.

Question 110 — Quels sont les polygones réguliers sphériques que l'on peut employer de manière à recouvrir la sphère en n'employant que des polygones égaux entre eux, associés en même nombre autour d'un sommet quelconque de l'un des polygones.

Soient:

n le nombre des côtés d'un polygone
k le nombre des polygones associés autour d'un même sommet
m le nombre des polygones.
A l'angle de l'un des polygones.

Supposons pour plus de simplicité le rayon de la sphère égal à l'unité, la surface de la sphère sera 4π et celle du triangle trirectangle sera $\frac{\pi}{2}$. La surface du polygone sphérique étant contenue m fois dans la surface de la sphère. Nous aurons la relation:

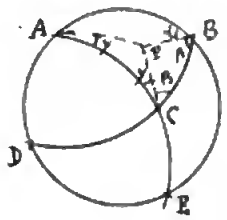
$$\frac{nA - 2(n^d - 2^d)}{1^d} = \frac{\frac{4\pi}{m}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{m}$$

égalité d'où nous déduisons:

Digitized by Google

un cercle. En effet si 2 angles opposés avaient toujours une somme égale à 2^d. La somme des 4 angles vaudrait 4^d. et la surface du quadrilatère serait nulle.

Question 107 – Lieu des sommets des triangles sphériques qui ont même base et même surface.



Pour résoudre ce problème : Cherchons d'abord le lieu des sommets des triangles qui ont même base DE et dans lesquels la différence entre la somme des angles à la base et l'angle au sommet est constante: Soit P le pôle du petit cercle ABC on a: $A+B-C=K$

ou. $2\alpha+\beta+\gamma-(\beta+\gamma)=K$

$$\alpha=\frac{K}{2}$$

Par conséquent dans le triangle APB, les angles à la base sont constants donc le point P est aussi constant, ainsi que les distances PA, PB, PC qui sont d'ailleurs égales entre elles, donc le lieu est un petit cercle de la sphère décrit du point P comme pôle et passant par les points A et B

Cela posé cherchons le lieu des sommets des triangles ayant même base DE et même surface, Prolongeons les arcs de grand cercle DC, CE jusqu'à ce qu'ils rencontrent la circonférence DEAB aux points A et B, la surface du triangle CDE est constante Qu'on a:

$$D+E+C-2^d=K$$

mais dans le triangle ABC on a:

$$A=2^d-E \qquad B=2^d-D$$

donc

$$D+E+C-2^d=2^d-(A+B-C)=K$$

et par conséquent :

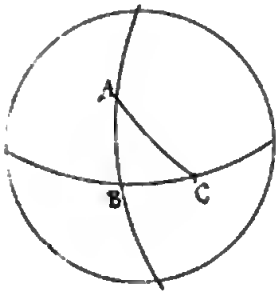
$$A+B-C=2^{ob}-K$$

Le lieu du point C est donc un arc de petit cercle passant par les points A et B diamétralement opposés aux points DetE

Le problème revient à mener par un point un arc de grand cercle faisant avec un arc de grand cercle donné un angle donné. Problème résolu

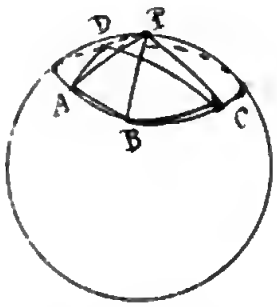
---

Question 103 — Construire un triangle sphérique rectangle connaissant les 2 angles aigus.



Soit ABC le triangle cherché. Le problème revient à déterminer le pôle P de l'hypoténuse, ce point se trouve à la fois sur le petit cercle lieu des pôles des grands cercles faisant avec le grand cercle AB un angle donné, et sur le lieu des pôles des grands cercles faisant avec BC un angle donné.

Question 104 — Condition pour qu'un quadrilatère sphérique soit inscriptible dans un petit cercle — La somme des angles d'un quadrilatère sphérique peut-elle être égale à 4 droits comme dans un quadrilatère plan.

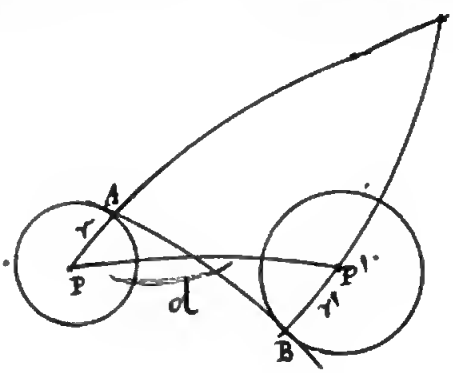


Soit $ABCD$ un quadrilatère sphérique dont les côtés sont des arcs de grand cercle et qui est inscrit dans un petit cercle. Si nous joignons les sommets du quadrilatère au pôle P du petit cercle, nous formerons 4 triangles isocèles.
La somme des angles $B+D$ du quadrilatère est égale à la somme des angles $A+C$, puisque chacune de ces sommes représente la moitié des angles à la base des triangles isocèles. Ainsi dans tout quadrilatère sphérique inscrit dans un petit cercle, la somme de 2 angles opposés est égale à la somme des 2 autres. Mais un quadrilatère la somme de 2 angles opposés n'est pas nécessairement égale à 2 droits comme cela a lieu pour un quadrilatère plan inscrit dans

cette dernière condition exprime que l'un des cercles n'est pas intérieur à l'autre. Enfin il faut que l'on ait:

$$d+g-r+g-r' < 4g \quad \text{ou} \quad d-r-r' < 2g$$

cette dernière condition entre dans la condition (1).



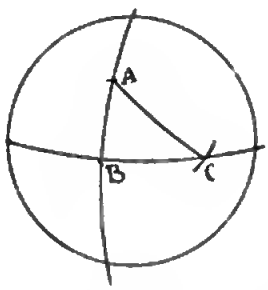
Proposons-nous maintenant de mener une circonférence de grand cercle tangente intérieurement à 2 petits cercles donnés. Supposons encore le problème résolu, soit P'' le sommet du grand cercle AB. Nous connaissons les 3 côtés du triangle PP'P'':

$$PP'' = g+r$$
$$P'P'' = g-r'$$
$$PP' = d$$

Les conditions de possibilité du problème sont:

$$d > r'+r.$$
$$d+r-r' < 2g \qquad r' \text{ étant supposé plus grand que } r$$

Question 101 — Construire un triangle sphérique rectangle connaissant un des côtés de l'angle droit et l'hypothénuse.



Traçons sur la sphère deux arcs de grand cercle perpendiculaires entre eux AB, BC, prenons sur l'un d'eux une longueur AB égale à l'arc de grand cercle donné. Enfin du point A comme pôle décrivons un cercle avec une ouverture de compas égale à la corde de l'hypothénuse donnée. L'un des points C où ce cercle rencontre BC, nous donne le troisième sommet du triangle cherché.

Question 102 — Construire un triangle sphérique connaissant un côté de l'angle droit et l'angle opposé.

Digitized by Google

cercle de la sphère symétrique de PM.

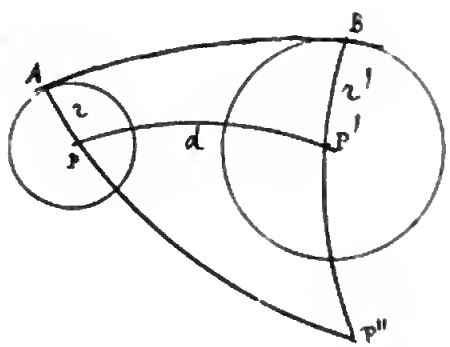
Les conditions de possibilité du problème apparaissent plus simplement, si nous remarquons que la question revient à mener par un point donné un plan tangent à un cône de révolution, ce qui exige que le point donné, soit extérieur au cône, condition unique équivalente aux 2 conditions que nous avons trouvé plus haut à l'heure

---

Question 99 — Mener par un point donné un petit cercle d'un rayon donné tangent à un grand cercle donné

Soit P le pôle du grand cercle donné, C le pôle du petit cercle, A le point donné, le pôle C se trouve à l'intersection des deux cercles connus décrits des points A et P comme pôles.

Question 100 — Etant donné 2 petits cercles sur la sphère sur mener un arc de grand cercle tangent.



Soient P et P' les pôles des 2 cercles donnés, AB l'arc de grand cercle cherché. P'' son pôle. Dans le triangle PP'P'' nous connaissons les 3 côtés. Désignons par g le 1/4 de la circonf^{ce}. Pour que le problème soit possible, il faut que les cercles décrits des points P et P' comme pôles avec les rayons:

$g-r$, $g-r'$

se coupent ce qui exige que l'on ait:

$$d < g-r+g-r'$$
$$d+r'+r < 2g \qquad (1)$$

2° que l'on ait

$$d > (g-r)-(g-r') \quad \text{ou} \quad d > r'-r \qquad (2)$$

Digitized by Google

coupent il faut

1° que l'on ait : $PA < PI + 1^{\text{quadrant}}$

condition toujours remplie, si on se sert du pôle P du cercle BC situé du même côté de ce cercle que le point A.

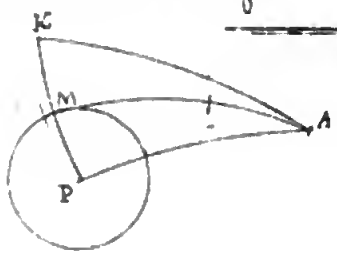
2° que l'on ait $PA > 1^{\text{quad.}} - PI$

ou $PA > IB$

ou $PI > AB$

C'est la seule condition de possibilité du problème. La 3° condition nécessaire pour l'intersection de 2 cercles sur la sphère se trouvant toujours remplie.

Question 98 — Mener par un point de la sphère un arc de grand cercle tangent à un petit cercle donné.



Supposons le problème résolu, soit : AM l'arc de grand cercle cherché, PM l'arc de grand cercle mené du pôle au point de contact. Prolongeons PM d'une longueur MK = PM nous aurons :

$$AK = AP$$

Le point K se trouve donc sur deux cercles décrits des points A et P comme pôles avec des rayons connus.

Pour que ces 2 cercles se coupent, il faut

1° Que la distance de leurs centres soit moindre que la somme de leurs rayons — Condition toujours remplie.

2° Que la distance de leurs centres soit plus grande que la différence de leurs rayons, ce qui exige que le point A soit extérieur au petit cercle donné

3° Que la somme des distances des centres et des rayons sphériques des 2 cercles soit inf^re à une circonférence de grand cercle.

Pour interpréter cette dernière condition. Désignons l'arc de grand cercle PM par v, l'arc de grand cercle PA par d. Nous aurons

$$2v + 2d < \text{circonf}^{\text{ce}}$$

$$v + d < 1/2 \text{ circonf}^{\text{ce}}.$$

ce qui exige que le point A ne se trouve pas à l'intérieur du petit

Pour que 2 petits cercles se coupent à la surface de la sphère il faut 1° que la distance de leurs centres soit moindre que la somme de leurs rayons et plus grande que leur différence, ce sont les conditions qui subsistent en géométrie plane.

Mais il y a une condition de plus:

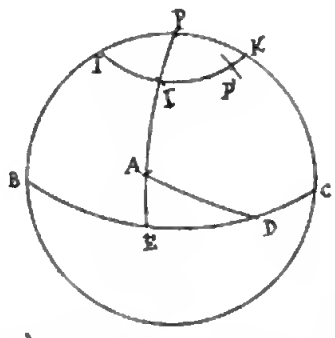
Il faut que la distance des centres augmentée de la somme des rayons soit inf^re à 4 droits, cette dernière condition est visible, si nous remarquons que les rayons des cercles sont inf^rs à 1^d et si nous prenons pour distance des centres des 2 cercles, l'arc de grand cercle moindre qu'une 1/2 circonférence qui les joint.

Les conditions apparaissent encore par l'analogie qui existe entre les angles triedres et les triangles sphériques.

Question 95 — Lieu des pôles des grands cercles faisant avec un grand cercle donné un angle donné.

Le lieu est un petit cercle de la sphère ayant même pôle que le grand cercle donné, et dont le rayon polaire est un arc de grand cercle égal à l'arc de grand cercle qui mesure l'angle donné.

Question 96 — Mener par un point donné un arc de grand cercle faisant avec un arc de grand cercle donné un angle donné.



Soit BC le grand cercle donné P son pôle AD le grand cercle cherché. On peut toujours supposer l'angle donné aigu. Si on considère tous les grands cercles faisant avec le grand cercle donné un angle égal à l'angle donné on sait que les pôles de ces cercles se trouvent sur un même petit cercle de la sphère décrit du point P comme pôle. D'un autre côté le pôle P' du cercle cherché doit se trouver aussi sur le grand cercle décrit du point donné A comme pôle il doit donc se trouver à l'intersection de ce grand cercle avec le petit cercle IK.

Pour que les deux cercles qui déterminent le point P' se

que les arcs AB et CD sont perpendiculaires au même plan S'AB qui passe par leurs centres et par le sommet du cône. D'ailleurs en menant la section B'MA' parallèle à la base on a :

$$\overline{MP}^2 = PA' \times PB' \qquad \overline{MP}^2 = PC \times PD$$

d'où : $PA' \times PB' = PC \times PD$

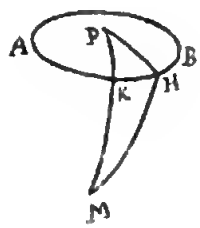
les triangles PA'C, PB'D sont donc semblables et les angles DB'A', DC'A' sont égaux, de sorte que CD est antiparallèle à AB.

Question 89 — Condition de semblitude de deux cônes circulaires obliques

---

La condition nécessaire et suffisante pour que 2 cônes obliques à base circulaire soient semblables est qu'en coupant chacun des cônes par un plan passant par l'axe et perpendiculaire au plan de la base on obtienne des triangles semblables, car alors l'un des cônes est identique au cône que l'on obtient en coupant le 2e cône par un plan parallèle à la base convenablement choisi.

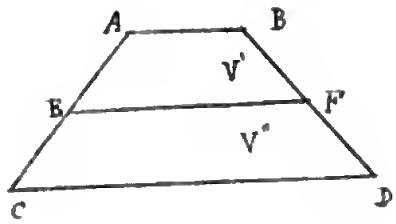
Question 90 — Plus court chemin d'un point de la sphère à un petit cercle.



Le plus court chemin d'un point M de la sphère à un petit cercle AB est l'arc de grand cercle MK moindre qu'une 1/2 circonférence et perpendiculaire au petit cercle. Il est facile de voir si l'on joint le point M à un point quelconque H du petit cercle par un arc de grand cercle que l'arc de grand cercle MK est moindre que l'arc de grand cercle MH. Par conséquent le plus court chemin de M en K est moindre que de M en H. Or le plus court chemin d'un point à un autre à la surface de la sphère est l'arc de grand cercle moindre qu'une 1/2 circonférence qui joint ces 2 points.

Question 91 — Condition d'intersection de 2 petits cercles à la surface de la sphère.

Digitized by Google



Soit : $ABCD$ le tronc de cône donné, EF le plan cherché, V le volume du tronc, V' et V'' les volumes des 2 troncs déterminés par le plan EF. D'après l'énoncé du problème nous avons :

$$V'^2 = VV'' \qquad (1)$$

Posons :

$$V' = kV$$

nous aurons :

$$V'' = (1-k)V$$

L'équation (1) deviendra :

$$k^2 = 1-k \qquad (2)$$

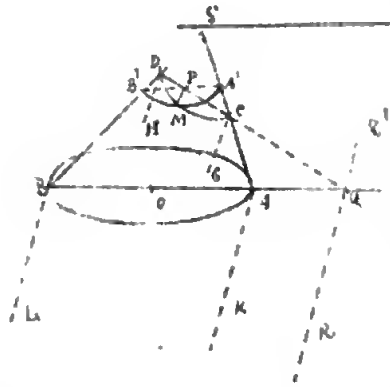
k étant déterminé nous sommes ramenés au problème précédent. La seule valeur de k qui convienne à la question est la valeur positive

---

Question 86 — Condition de similitude de 2 troncs de cône

Pour que 2 troncs de cône soient semblables il est nécessaire et suffisant qu'ils soient engendrés par 2 trapèzes rectangles semblables.

Question 88 — Dans le cône oblique à base circulaire il n'y a que les sections parallèles ou antiparallèles à la base qui donnent des cercles.



(1) Considérons une section circulaire non parallèle à la base et soit RR' la trace de son plan MRR' sur le plan de la base ; du centre O abaissons sur RR' la perpendiculaire OC qui rencontre la circonférence en A et B ; menons les génératrices SA, SB, et les tangentes AK et BL qui sont visiblement parallèles à CR.

Les plans SAK, SBL tangents au cône, coupent le plan MRR' suivant 2 droites CG, DH tangentes au cercle CMD et parallèles à RR', par suite la droite DCE sera perpendiculaire à RR', et l'on conclut de là

---

(1) Cette démonstration est empruntée à la géométrie de Mrs Rouché et Comberousse.

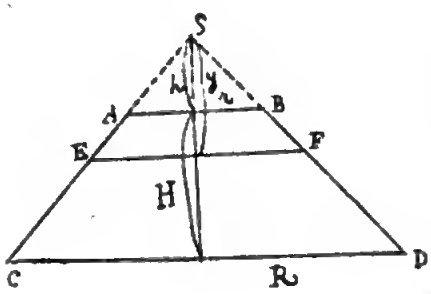
Digitized by Google

Pour qu'un prisme triangulaire soit égal à son symétrique, il faut que le prisme soit droit, ou que la base du prisme étant un triangle isocèle, l'arête du prisme qui part du sommet du triangle isocèle fasse des angles égaux avec les côtés égaux du triangle.

Question 79 — Quel rapport de forme existe-t'il entre les figures homothétiques directes et inverses d'un même polyèdre.

Deux polyèdres dont l'un est la figure homothétique directe, l'autre la figure homothétique inverse d'un même polyèdre, sont symétriques, s'ils ont été construits avec le même rapport d'homothétie, sinon l'un est semblable au symétrique de l'autre.

Question 84 — Partager un tronc de cône, dans un rapport donné par un plan parallèle aux bases.



Soient: v, R, H les dimensions du tronc de cône, V son volume, v le volume du petit cône qui surmonte le tronc, h la hauteur de ce même cône; H et v peuvent être supposés connus. Enfin soit: EF le plan cherché, y sa distance au sommet du cône, V' le volume du tronc-cône ABEP. Nous aurons:

$$\frac{V'+v}{V+v} = \frac{y^3}{(H+h)^3}$$

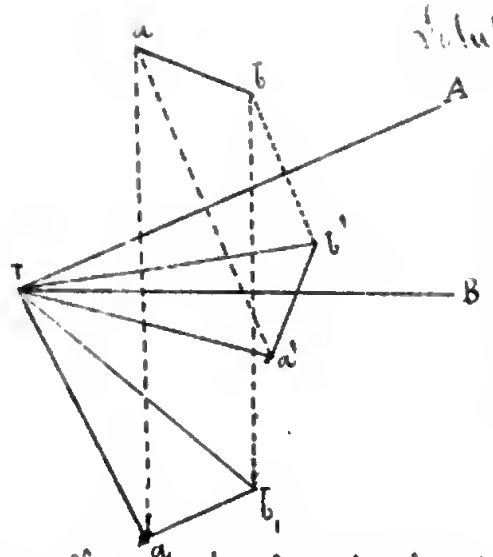
égalité dans laquelle tout est connu sauf y, puisqu'on a par hypothèse

$$V' = KV$$

K étant une quantité connue.

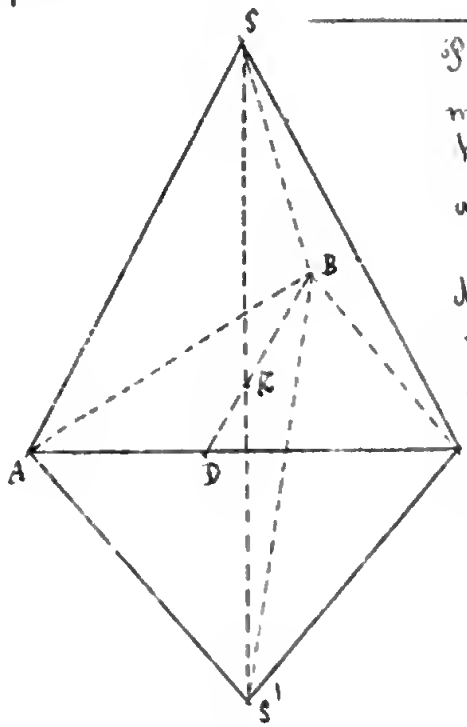
Question 85 — Partager un tronc de cône en moyenne et extrême raison par un plan parallèle aux bases.

Digitized by Google



par rapport aux deux plans, $b', b,$ les symétriques du point b. Les 3 points a a', $a,$ sont dans un même plan perpendiculaire à xy ainsi que les 3 points $b, b', b,$. Je projette la figure sur un plan perpendiculaire à xy qui coupe xy en I et les deux plans suivant IA et IB. Enfin je désigne les projections des points de l'espace par les mêmes lettres que ces points eux-mêmes. Ceci posé il est facile de voir que le théorème revient à démontrer l'égalité des angles : $a'Ia,$, $b'Ib,$, égalité évidente si nous remarquons que les triangles : $a'Ib'$, $a,Ib,$ sont égaux.

Question 75 — Conditions d'égalité de 2 tétraèdres symétriques.



Pour qu'un tétraèdre soit égal à son symétrique, il suffit que l'une des arêtes du tétraèdre soit la base commune de 2 triangles isocèles.

Soit par exemple le tétraèdre $SABC$ dans lequel AC est la base commune des 2 triangles isocèles ABC, ASC, il est facile de voir en prenant le plan ABC pour plan de symétrie, que le tétraèdre donné est égal à son symétrique, car si nous détachons les 2 pyramides qui ont pour base commune ABC et si nous retournons la seconde de manière à amener S' du même côté de S, nous pourrons faire coïncider les 2 bases, mais alors les 2 faces CSA, CSA coïncideront également.

Question 76. Conditions d'égalité de 2 prismes triangulaires symétriques.

Digitized by Google

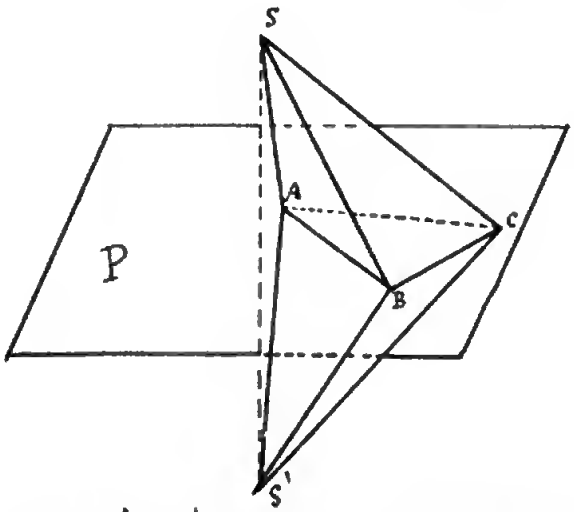
Cette dernière remarque va nous fournir le nombre de conditions nécessaires pour la similitude de 2 polyèdres dans des cas particuliers. Exemples:

6 conditions sont nécessaires pour déterminer un parallélépipède, 5 pour la similitude de 2 parallélépipèdes.

7 conditions sont nécessaires pour déterminer un tronc de pyramide triangulaire, 6 pour la pyramide dont le tronc fait partie, une pour la hauteur du tronc: 6 conditions sont nécessaires pour la similitude de 2 troncs de pyramide triangulaire. etc.

Question 72 - Ne peut-on pas voir directement sans passer par la symétrie par rapport à un point que 2 polyèdres symétriques par rapport à un plan ne sont pas superposables

---



Il suffit visiblement de démontrer que 2 angles trièdres S et S' symétriques par rapport à un plan P ne sont pas superposables. En effet si on place la face AS'B sur son égale ASB en plaçant AS' sur AS, BS' sur BS les arêtes SC, S'C seront situées de côtés différents de la face commune. Si l'on place S'B sur SA et S'A sur SB les arêtes S'C, SC seront bien situées du même côté de la face commune, mais il n'y aura coïncidence entre les deux trièdres que si le dièdre suivant S'B est égal au dièdre suivant SA, c'est à dire que si les dièdres SA, SB sont égaux entre eux autrement dit que si le triède donné est isocèle.

Question 73 - Deux polyèdres symétriques d'un même polyèdre. P par rapport à deux plans différents peuvent coïncider par une rotation autour de l'intersection des deux plans.

Soit xy l'intersection des deux plans. Considérons deux sommets a et b du polyèdre. Soient a', a, les symétriques du point a

Digitized by Google

deux premiers tétraèdres et 3 pour chacun des autres
comme il y a en tout $n-3$ tétraèdres. Le nombre des conditions nécessaires pour la similitude des polyèdres est :

$$5 + (n-4)3 = 3n-7$$

et aucune de ces conditions n'est superflue.

Mais si on considère deux polyèdres de forme déterminée, c'est-à-dire ayant le même nombre de faces et dans lesquels les faces d'un même nombre de côtés sont disposées de la même manière, le nombre des conditions s'abaisse. Si A est le nombre des arêtes, $A-1$ conditions suffisent pour la similitude des polyèdres, puisqu'il faut une condition de moins pour la similitude de deux polyèdres que pour leur égalité.

---

est due à Robert Simson. Legendre lui en avait substitué une autre, il divisait en deux la définition des polyèdres semblables. Il définissait d'abord deux pyramides triangulaires semblables. et ajoutait ensuite polyèdres semblables deux polyèdres qui ayant des bases semblables, ont les sommets hors de ces bases déterminés par des pyramides triangulaires semblables. Mais la définition de Legendre ne donne pas une image aussi nette de deux polyèdres semblables que celle de Robert Simson, de plus elle ne donne le nombre de conditions réellement nécessaires pour la similitude de deux polyèdres, que lorsqu'on considère deux polyèdres d'un même nombre de sommets mais non pas deux polyèdres ayant des faces d'un même nombre de côtés. C'est pourquoi M. Blanchet et les géomètres qui sont venus après lui sont revenus à la définition de Robert Simson.

Digitized by Google

Relativement au théorème de Legendre, il faut bien remarquer que le nombre des conditions nécessaires pour déterminer un polyèdre est égal au nombre des arêtes, lorsque les arêtes sont différentes, mais n'est pas égal aux nombres des arêtes différentes, lorsque certaines arêtes sont égales entre elles S'il s'agit par exemple d'un prisme dont la base a m côtés, le nombre des arêtes distinctes est $m+1$ et cependant il faut $2m$ conditions pour le déterminer

$2m-3$

pour la base inf^{re} et 3 pour un sommet de la base sup^{re}.

Question 68 — Nombre de conditions nécessaires pour que deux polyèdres soient semblables — et combien s'abaisse ce nombre de conditions dans les cas particuliers suivants:

Parallélipipèdes Prismes — Troncs de pyramide etc.

On appelle polyèdres semblables, deux polyèdres qui ont les angles solides égaux et les faces semblables.(1) Cette définition renferme bien des conditions superflues On peut se demander combien de conditions sont rigoureusement nécessaires pour que deux polyèdres soient semblables. Et ce point de vue on peut poser le problème de 3 manières: Deux polyèdres ont n sommets, on ne sait rien sur la nature de leurs faces Combien faut-il de conditions pour leur similitude. Il faut:

$3n-7$

conditions. Remarquons en effet que pour que deux polyèdres soient semblables il est nécessaire et suffisant que ces polyèdres soient décomposables en un même nombre de tétraèdres semblables et semblablement placés. Or il faut 5 conditions pour la similitude des

---

(1) Il est assez curieux de suivre les variations qu'a subies la définition des polyèdres semblables dans les éléments de Géométrie Euclide définit deux polyèdres semblables en disant que ce sont deux polyèdres qui ont les faces semblables Mais alors il faut démontrer que deux polyèdres semblables ont les angles solides égaux: théorème difficile qui n'a été démontré que dans ces derniers temps par Mr Cauchy. La définition des polyèdres semblables que l'on adopte encore aujourd'hui

Digitized by Google

Si les autres faces du polyedre etaient triangulaires il faudrait $3n-3$ conditions pour déterminer chacun des autres sommets en tout.

$$2n-3+(S-n)3 = 3S-(n-3)-6$$

Mais remarquons que si les autres faces du polyedre ne sont pas toutes triangulaires, si une face a n' sommets, un sommet quelconque de cette face doit se trouver dans le plan que 3 autres sommets déterminent, ce qui assujetit les sommets de cette face, à satisfaire à :

$n'-3$

conditions, nombre qu'il faut retrancher de:

$$3S-(n-3)-6$$

si l'on veut trouver le nombre de conditions réellement necessaires pour déterminer le polyedre. Le nombre est par consequent:

$$3S-\Sigma(n-3)-6$$

ou on a:

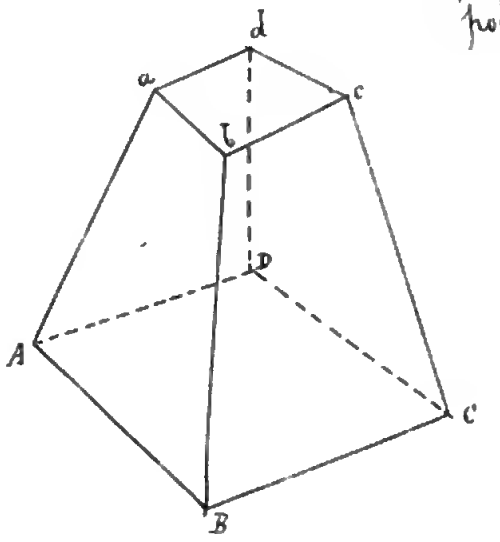
$$\Sigma(n-3) = 2A-3F$$

par consequent le nombre de conditions necessaires pour determiner le polyedre est:

$$3S-2A+3F-6$$

en ayant egard au théorème d'Euler ce nombre se reduit à A.

Pour eclairer ceci par un exemple considerons un polyèdre convexe formé par 6 quadrilatères. Le polyedre ayant 12 arêtes il faut 12 conditions pour le déterminer



5 pour determiner la base $ABCD$

3 pour determiner le sommet a

2 pour le sommet b puisqu'il se trouve dans le plan $Aa B$

2 pour le sommet c qui est dans le plan bBC

0 pour le sommet d qui se trouve dans 3 plans déterminés lorsque les points a, b, c le sont.

Digitized by Google

Le nombre des conditions nécessaires pour déterminer un Polyèdre est égal à 6. Il faut 3 conditions pour déterminer la base, 3 conditions pour déterminer la position du sommet par rapport à la base. Pour déterminer la figure formée par m points il faut.

$$3m-6$$

conditions, 3 pour la figure formée par les 3 premiers points et 3 pour chacun des autres on a:

$$3+(m-3)\,3 = 3m-6$$

Le fait qu'un point appartient à un plan équivaut à une condition simple. Lorsqu'on sait qu'un point se trouve dans un plan déterminé il faut encore 2 conditions pour fixer sa position dans le plan.

Nous venons de trouver qu'il faut $3m-6$ conditions pour déterminer la figure formée par m points. Il ne faut pas croire que le nombre des conditions nécessaires pour déterminer un polyèdre de m sommets soit en général aussi considérable. Il ne faut $3m-6$ conditions pour déterminer un polyèdre de m sommets que si les faces de ce polyèdre sont toutes triangulaires. Autrement le nombre des conditions s'abaisse. Legendre a démontré (1) que le nombre des conditions nécessaires pour déterminer un polyèdre est égal au nombre de ses arêtes.

Supposons que le polyèdre soit d'une espèce déterminée, autrement dit: On connaît le nombre des faces du polyèdre, le nombre des côtés de chaque face, et la disposition des faces les unes par rapport aux autres. Il ne s'agit plus que de savoir le nombre des données effectives, lignes ou angles nécessaires pour déterminer le polyèdre.

Considérons une des faces du polyèdre que nous prendrons pour base, si cette face a n côtés, il faut:

$$2n-3$$

conditions pour la déterminer.

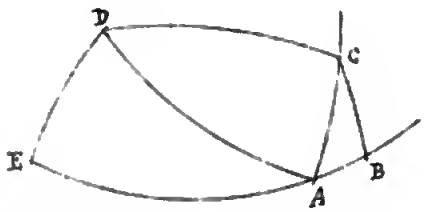
---

(1) Legendre note VIII

une surface polyédrale ayant $F-1$ faces pour laquelle nous aurons:

$$F-1+S=A+1$$
$$F+S=A+2$$

2e Demonstration. — Cette 2e demonstration empruntée à l'ancienne Geometrie de Legendre est fondée sur un artifice fort usité en géometrie. Considerons un point quelconque à l'intérieur du polyèdre. De ce point comme centre decrivons une sphère. Les droites qui joignent le point choisi aux sommets du polyedre percent la sphère en differents points que nous joindrons par des arcs de grand cercles. Ces arcs de grand cercle recouvriront la sphère de polygones correspondant aux différentes faces du polyèdre.



Soit $ABCDE$ l'un de ces polygones et soit n le nombre de ses côtés, sa surface sera:

$$s-2(n-2)=s-2n+4$$

s representant la somme de ses angles. Si nous faisons la somme des surfaces de ces polygones nous trouverons la surface de la sphère qui est egale à 8. D'un autre côté la somme des angles des polygones est egale à:

$$4S$$

puisque la somme des angles des polygones qui s'ajustent autour d'un même point est egale à 4 droits et qu'il y a sur la sphère autant de sommets que dans le polyèdre de plus on a:

$$\Sigma n = 2A \qquad \Sigma 4 = 4F$$

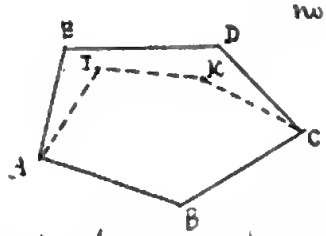
par conséquent on a l'egalité:

$$8=4S-4A+4F$$
$$S+F=A+2$$

Question 66 — Nombre de conditions necessaires pour définir un tétraedre, la figure formée par n points de l'espace, pour qu'un point appartienne à un plan

Question 80 — Théorème d'Euler — Dans tout polyèdre convexe, le nombre des arêtes augmenté de deux est égal au nombre des faces augmenté du nombre des sommets. (1)

1° Démonstration — Le théorème d'Euler peut être considéré comme la conséquence du somme suivant que nous commencerons par démontrer.



« Si une surface polyédrale convexe est limitée par une ligne brisée dont les côtés sont ou ne sont pas dans un même plan, le nombre des faces plus le nombre des sommets est égal au nombre des arêtes plus 1 »

Ultérieurement désignons par F le nombre des faces, S le nombre des sommets, A le nombre des arêtes on a:

$$F + S = A + 1.$$

Le théorème est vrai dans le cas de $F = 1$ car alors on a:

$$S = A$$

Admettons que la formule soit vraie pour une surface polyédrale composée de F faces démontrons qu'elle s'applique encore au cas de $F+1$ faces. Soit $ABCDE$ la ligne brisée qui termine la surface. Construisons sur AB une nouvelle face, si elle a p côtés communs avec la ligne brisée elle aura $p+1$ sommets communs avec cette ligne. De sorte que si cette face est un polygone de n côtés. Dans la nouvelle surface il y aura:

$F+1$ faces
$S + n - (p+1)$ sommets
$A + n - p$ arêtes.

Si on a:

$$F + S = A + 1$$

on aura aussi.

$$F_1 + S + n - (p+1) = A + n - p + 1$$

Cela posé considérons une polyèdre convexe ayant F faces, S arêtes et A sommets: Supprimons une face nous aurons

Digitized by Google

est droit

Dans le 2e mode de superposition il faut placer le triangle BCG sur son égal EFH en plaçant CD sur EH et BC sur EF, la coïncidence de ces lignes n'est possible que si la base du parallélépipède est un losange. Mais ce n'est pas tout il faut encore pour la coïncidence que

l'angle DCG = angle AEH
et l'angle BCG = angle AEF

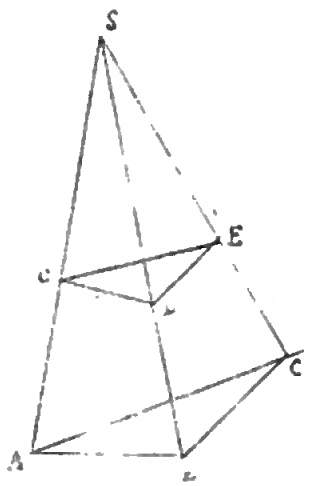
mais l'on a:

ang DCG = ang. AEF
ang. BCG = ang AEH

donc il faut que les angles AEF et AEH soient égaux entre eux. Autrement dit:

La coïncidence n'est possible que lorsque le parallélépipède donné est droit, ou lorsque sa base étant un losange deux arêtes opposées sont situées dans le plan mené par une diagonale du losange perpendiculairement au plan de la base.

Question 65 — On coupe un tétraèdre par un plan oblique à la base. Volume du tronc de pyramide déterminé par le plan sécant.



Soit SABC la pyramide donnée, CDE le plan sécant. Le volume de la pyramide SCDE est facile à calculer. Nous avons:

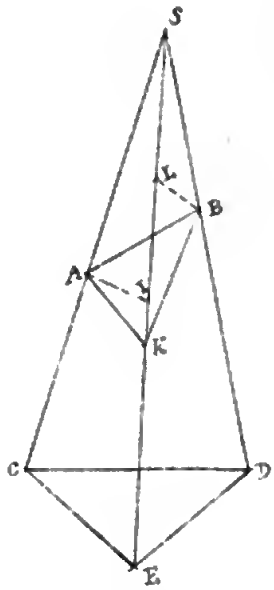
$$\frac{SCDE}{SABC} = \frac{SC \times SD \times SE}{SA \times SB \times SC}$$

le volume de cette pyramide étant obtenu. Le volume du tronc s'obtiendra par différence.

Digitized by Google

Solutions.

Le problème revient à trouver sur l'arête SB un point K, tel que la somme des surfaces des triangles, SAK, SBK soit égale à une quantité donnée m^2. Soient AI, BL les perpendiculaires abaissées des points A et B sur SK. Nous aurons:



$$\text{Surf. } ASK = \frac{SK \times AI}{2}$$

$$\text{Surf. } BSK = \frac{SK \times BL}{2}$$

et par conséquent:

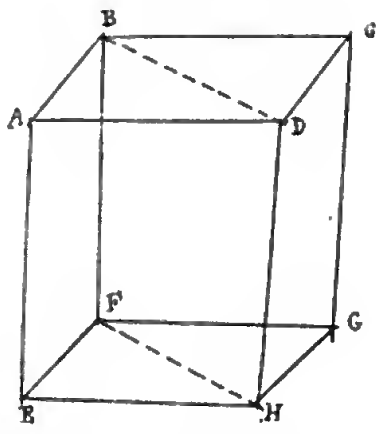
$$SK(AI + BL) = 2m^2$$

$$SK = \frac{2m^2}{AI + BL}$$

SK peut donc être obtenue par une 3e proportionnelle.

Question 58 — Le plan qui passe par deux arêtes opposées d'un parallélépipède le partage en deux prismes triangulaires équivalents — Condition pour qu'ils soient égaux

---

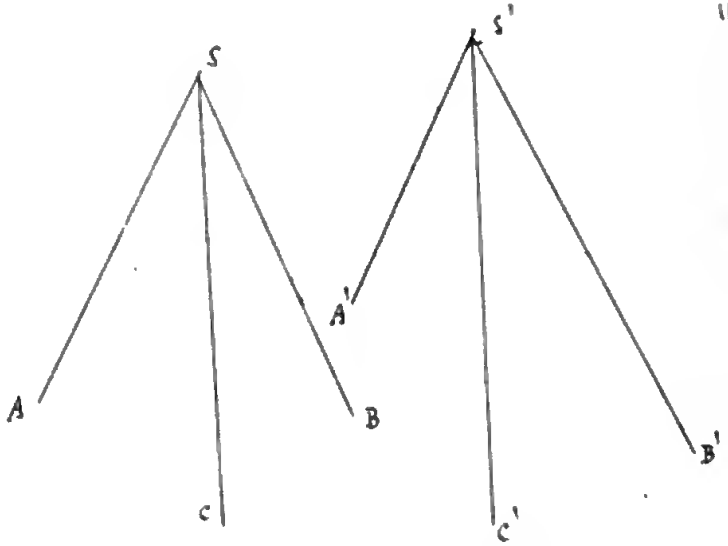


Soit BDFH le plan qui partage le parallélépipède en deux prismes triangulaires. On ne peut essayer de faire coïncider ces deux prismes que de deux manières ou en commençant par placer le triangle FGH sur son égal EFH ou en commençant par placer le triangle BCD sur le même triangle EFH. Lorsqu'on essaye le 1er mode de superposition, on est arrêté par la difficulté de faire coïncider les deux angles CGF et AEH qui sont généralement supplémentaires, ainsi que les CGH, AEF, cette coïncidence n'est possible que si ces angles sont droits, c'est à dire si le parallélépipède donné

Digitized by Google

leur intersection. Le problème est donc ramené à construire une droite parallèle à une droite donnée qui s'appuie respectivement sur deux droites données.

Question 47. — Étant donné deux angles triedres qu'entend-t-on par dièdres semblablement disposés par rapport à une face.



Considérons deux angles triedres ayant une face égale adjacente à deux dièdres égaux. Soient SAB, S'A'B' les faces égales. Un observateur placé suivant SC et regardant la face ASB, aura le dièdre SA à sa gauche et le dièdre SB à sa droite. De même un observateur placé de la même manière le long de S'C' aura le dièdre S'A' à sa gauche et le dièdre S'B' à sa droite. Si le dièdre S'A' est égal au dièdre SA et S'B' au dièdre SB les dièdres égaux seront semblablement disposés par rapport à la face égale:

Lorsque deux angles triedres ont une face égale adjacente à deux dièdres égaux, la disposition est la même si les dièdres égaux se présentent de la même manière pour deux observateurs couchés le long de la 3e arête et regardant respectivement les faces égales.

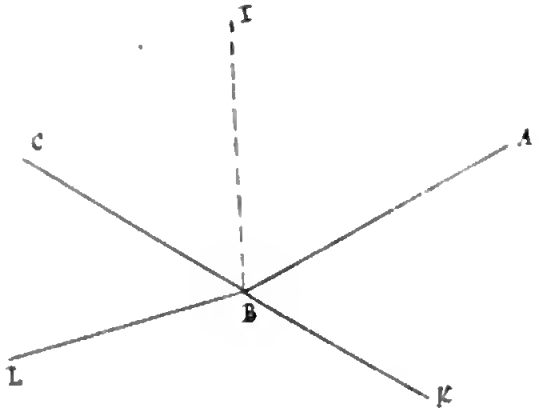
Question 55 — Étant donné une pyramide triangulaire et une droite AB dans l'une des faces, mener par cette droite un plan qui divise la surface latérale du tetraedre en deux parties équivalentes.

Soit SCDE la pyramide donnée
AB la droite donnée

en même sur un plan passant par AB, car si nous abaissons une perpendiculaire CK sur un plan passant par AB, d'après le théorème des 3 perpendiculaires AK sera perpendiculaire sur AB.

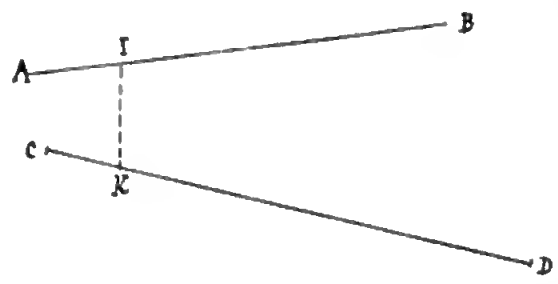
Je dis en second lieu que la condition énoncée est nécessaire: Pour qu'un angle droit se projette suivant un angle droit sur un plan passant par le sommet de l'angle, il faut que le plan de projection contienne un des côtés de l'angle donné.

Soit l'angle droit ABC qui se projette suivant l'angle droit KBL. Je dis que si BC ne se confond pas avec BL, AB doit se confondre avec BK. Autrement les deux plans CBL, ABK se coupant suivant une droite BI perpendiculaire au plan KBL. BK étant perpendiculaire sur BI et sur BL serait perpendiculaire au plan IBL, de même LB serait perpendiculaire au plan IBK et par suite sur BA, mais déjà BA est perpendiculaire sur BC donc BA serait perpendiculaire au plan IBL ce qui est impossible si elle ne se confond pas avec BK.



Question 44 — Démontrer que la plus courte distance de deux droites est leur perpendiculaire commune.

Soit AB et CD deux droites, IK leur plus courte distance. IK étant nécessairement la plus courte distance du point I à la droite CD est perpendiculaire sur CD, on verrait de même qu'elle est perpendiculaire sur AB. Donc elle est la perpendiculaire commune aux deux droites.

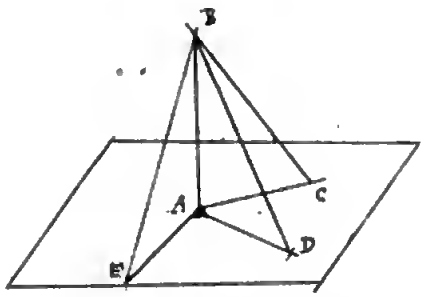


Pour la construire il suffit de remarquer que si on mène deux plans perpendiculaires à chacune des droites, la droite IK est parallèle à

il admet deux solutions.
Si m^2 est sup^{r} à $\frac{p^2}{4}$ la proposition est impossible. Le maximum de m^2 est

$$\frac{p^2}{4}.$$

Question 31. Une droite est perpendiculaire sur un plan lorsqu'elle fait des angles egaux avec 3 droites passant par son pied dans le plan.



Soit AB une droite faisant des angles egaux avec 3 droites :

AC, AD, AE

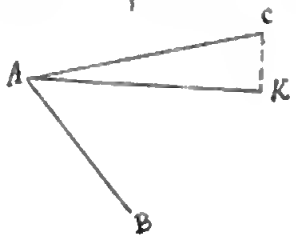
passant par son pied dans le plan je dis qu'elle est perpendiculaire au plan. Prenons à partir du point A des longueurs egales :

$$AC = AD = AE$$

les 3 lignes BC, BD, BE seront aussi egales entre elles. Donc elles seront egalement eloignées du pied de la perpendiculaire abaissée du point B sur le plan. Mais comme dans un plan il n'existe qu'un seul point egalement distant de 3 autres, le pied de cette perpendiculaire se confondra avec le point A.

Question 43 — Condition necessaire et suffisante pour qu'un angle droit se projette sur un plan suivant un angle droit.

La condition necessaire et suffisante pour qu'un angle droit se projette suivant un angle droit est : que l'un des côtés de l'angle soit parallèle au plan de projection.



La condition enoncée est suffisante. Soit un angle droit CAB je dis qu'il se projettera suivant un angle droit sur un plan parallèle à AB ou ce qui revient

Digitized by Google

Solutions.

Nous avons evidemment les deux equations:

$$2x + y = 2p \qquad (1)$$

$$xy = 2m^2 \qquad (2)$$

L'elimination d'y donne l'equation:

$$x^2 - px + m^2 = 0$$

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - m^2} \qquad (3)$$

Pour que les deux valeurs de x soient reelles il faut que l'on ait:

$$\frac{p^2}{4} - m^2 > 0$$

Si cette condition est remplie les deux valeurs de x sont positives. mais pour qu'une valeur de x soit admissible il faut qu'à cette valeur de x corresponde une valeur correspondante pour y ou: on doit avoir : $y > 0$ et $y < 2p - x$

ce qui exige que l'on ait:

$$x < p \qquad \text{et} \qquad x > \frac{p}{1+\pi}$$

La 1ère condition est toujours remplie.

La valeur de x qui correspond au signe + du radical est inférieure à

$$\frac{p}{1+\pi}$$

lorsqu'elle est reelle.

Pour que la valeur de x qui correspond au signe − du radical soit acceptable il faut que l'on ait l'inegalité

$$\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - m^2} > \frac{p}{1+\pi}$$

$$\frac{p(\pi - 1)}{2(1+\pi)} > \sqrt{\frac{p^2}{4} - m^2}$$

$$m^2 > \frac{p^2}{4}\left[1 - \frac{(\pi-1)^2}{(\pi+1)^2}\right]$$

Par consequent lorsque:

$$m^2 < \frac{p^2}{4}\left(1 - \frac{(\pi-1)^2}{(\pi+1)^2}\right)$$

le problème n'a qu'une solution lorsque m^2 est compris entre:

$$\frac{p^2}{4}\left[1 - \frac{(\pi-1)^2}{(\pi+1)^2}\right] \quad \text{et} \quad \frac{p^2}{4}$$

Digitized by Google

Question 17 — Nombre de conditions nécessaires pour que deux polygones soient semblables — À combien ce nombre de conditions s'abaisse-t-il dans les cas particuliers suivants : parallélogramme, rectangle, trapèze, quadrilatère inscriptible, losange etc

---

Deux polygones semblables sont décomposables en un même nombre de triangles semblables et semblablement placés. Les conditions sont à la fois nécessaires et suffisantes pour la similitude. Or, deux conditions suffisent pour la similitude de deux triangles. Le nombre des conditions suffisantes pour la similitude de deux polygones de n côtés est donc:

$$(n-2)\,2 = 2n-4$$

On pourrait encore trouver ce résultat en remarquant qu'il faut une condition de moins pour la similitude de deux polygones que pour leur égalité. On sait qu'il faut $2n-3$ conditions pour fixer la forme d'un polygone de n côtés et par conséquent aussi pour l'égalité de deux polygones de n côtés.

D'après cela 4 conditions suffisent pour la similitude de deux quadrilatères. Le nombre de conditions s'abaisse à 3 si on donne une relation entre les éléments du quadrilatère, comme dans le trapèze le quadrilatère inscriptible, il s'abaisse à deux s'il existe deux relations entre les éléments du quadrilatère comme cela a lieu pour le parallélogramme. Enfin une seule condition suffit pour la similitude de 2 quadrilatères entre les éléments desquels il existe 3 relations comme pour le rectangle le losange.

Question 18 — Déterminer les dimensions d'un secteur circulaire connaissant son périmètre et sa surface

---

Soient :

$2p$. le périmètre
m^2 . la surface du secteur
x . le rayon du cercle auquel il appartient.
y . l'arc qui lui sert de base.

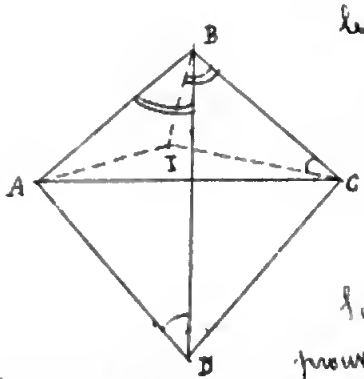
(1)

$$CBI = ABD$$

et l'angle:

$$BCI = ADB$$

les deux triangles BCI et ADB sont semblables par conséquent on a:



$$\frac{BC}{BD} = \frac{BI}{BA} \quad \text{et:} \quad \frac{BC}{BD} = \frac{IC}{AD}$$

cette dernière égalité peut s'écrire:

$$BC \times AD = BD \times IC \qquad (1)$$

la 1ère jointe à l'égalité des angles CBD, ABI prouve que les deux triangles ABI, CBD sont semblables, par conséquent on a aussi l'égalité:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AI}{DC} \quad \text{ou:}$$

$$AB \times DC = AI \times BD \qquad (2)$$

ajoutons les égalités (1) et (2) il vient:

$$AB \times DC + AD \times BC = BD(AI + IC)$$

comme $AI + IC$ est généralement plus grand que AC, on voit qu'en général le rectangle des diagonales est plus grand que la somme des rectangles des côtés opposés à moins que la droite CI ne se confonde avec CA autrement dit que le quadrilatère ne soit inscriptible.

Question 11 — Nombre de conditions nécessaires pour déterminer un polygone de m côtés

---

Un polygone de m côtés peut être décomposé en $m-2$ triangles. Le nombre des conditions nécessaires pour déterminer le 1er triangle est égal à 3, pour déterminer chacun des autres triangles il faut 2 conditions, en tout un nombre de conditions égal à:

$$3 + (m-3)2 = 2m - 3$$

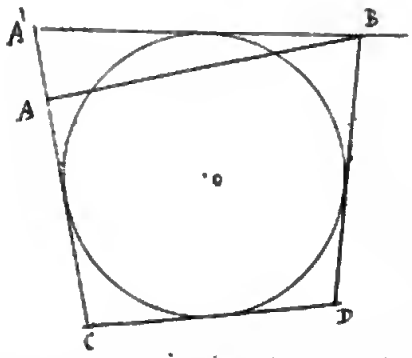
il faut $2m - 3$ conditions

Cette démonstration est empruntée à la géométrie de Mrs Rouché et Comberousse

Digitized by Google

Géométrie élémentaire
Solutions

Question 2 — Si dans un quadrilatère la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres, le quadrilatère est inconscriptible.



Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que l'on ait :

$$AB + CD = AC + BD$$

je dis que ce quadrilatère est circonscriptible à un cercle. Décrivons un cercle tangent aux 3 côtés AC, CD, BD, je dis qu'il touchera aussi le 4e côté AB. Supposons pour un instant que le cercle O coupe le côté AB. Menons du point B une tangente à ce cercle BA'. Nous aurons d'une part :

$$AB + CD = AC + BD$$

et d'autre part :

$$A'B + CD = A'C + BD$$

ce qui exigerait que l'on ait :

$$A'B - AB = A'C - AC = AA'$$
$$A'B = AA' + AB$$

ce qui est absurde.

Question 9 — Si dans un quadrilatère, le rectangle des diagonales est égal à la somme des rectangles des côtés opposés le quadrilatère est inscriptible.

Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque. Je puis un point B l'angle

Surfaces des figures tracées sur la sphère

105 Deux triangles spheriques symetriques sont equivalents — ils sont superposables s'ils sont à la fois symetriques et isos- I-II celes.

106 Surface d'un triangle spherique — Sens exact de l'enoncé du theorème — Surface d'un polygone spherique. I-II

107 Lieu des sommets des triangles spheriques qui ont même base et même surface. II-R

108 Angle d'un triangle spherique equilateral dont la surface vaut la 4e partie de la surface de la sphère.

109 Déterminer un triangle spherique isocèle et rectangle connaissant sa surface et le rayon de la sphère — Un carré spherique dans les mêmes conditions. II-R.

110 Quels sont les polygones reguliers spheriques que l'on peut employer de manière à recouvrir la sphère en ne se servant que de polygones egaux entre eux. II-R

Volumes

111 Volume de la pyramide spherique qui a son sommet au centre de la sphère — Application : La base de la pyramide est un triangle spherique equilateral dont l'angle est de 80° et le rayon de la sphère est de 5m. II

112. Volume engendré par un segment de cercle tournant autour d'un diamètre. I-II

113 Volume du segment spherique.

Fin des enoncés de géométrie.

Notation employée dans cette table.

I. indique qu'une question a été posée aux examens du 1er degré

II. aux examens du 2e degré

R. qu'elle est resolue dans ce recueil.

Digitized by Google

92 Théorèmes sur l'égalité des triangles sphériques — Qu'entend-t'on par angles semblablement placés par rapport à un côté dans deux triangles sphériques II

93 (2) Deux triangles sphériques qui ont les 3 côtés égaux et semblablement disposés sont égaux — Théorème sur lequel on s'appuie II

Cercles tracés sur la sphère

---

94 Condition pour que deux petits cercles se coupent à la surface de la sphère I-II-R

95 Lieu des pôles des grands cercles faisant avec un grand cercle donné un angle donné II-R

96 Mener par un point pris sur un grand cercle un 2e grand cercle faisant avec le premier un angle donné II

97 Même question en supposant que le point donné soit un point quelconque de la sphère. II-R.

98 Mener par un point de la sphère un arc de grand cercle tangent à un petit cercle. II-R

99 Décrire un petit cercle d'un rayon donné tangent à un grand cercle donné et passant par un point donné. II-R.

100 Etant donnés deux petits cercles sur la sphère, leur tracer un arc de grand cercle tangent. II-R

Constructions de triangles sphériques.

101 Construire un triangle sphérique rectangle connaissant: " 1° un côté de l'angle droit et l'hypothénuse II-R

102 " 2° un côté de l'angle droit et l'angle opposé II-R

103 3° Les deux angles aigus. II-R.

Propriété du quadrilatère sphérique

---

104 Condition pour qu'un quadrilatère sphérique soit inscriptible dans un petit cercle I-R

Surfaces des figures tracées sur la sphère

Digitized by Google

79 Rapport de forme qui existe entre les figures homothétiques directes et inverses d'un même polyèdre. II-R

---

80 Théorème d'Euler sur les polyèdres. II-R

Corps ronds

---

81. Surface latérale du Tronc de Cône I-II
82 Partager un Tronc de Cône par un plan parallèle aux bases en deux segments ayant même surface totale. II
83 Partager un Tronc de Cône en deux parties équivalentes par un plan parallèle aux bases. II
84 Partager un Tronc de Cône dans un rapport donné par un plan parallèle aux bases II-R
85 Partager un Tronc de Cône en moyenne et extrême raison par un plan parallèle aux bases II-R
86 Conditions de similitude de 2 Troncs de Cône. II-R

Cône oblique à base circulaire.

87 Section antiparallèle du Cône oblique à base circulaire. I
88. Dans le Cône oblique à base circulaire, existe-t-il d'autres sections que les sections parallèles à la base, ou les sections antiparallèles qui donnent des cercles. I-R
89 condition de similitude de 2 cones circulaires obliques II-R

Sphère.

Figures tracées sur sa surface.

---

90 Le plus court chemin d'un point à un autre sur la surface de la sphère est l'arc de grand cercle moindre qu'une 1/2 circonférence qui joint ces deux points. I-II
Plus court chemin d'un point de la sphère à un petit cercle II-R
91. Définition du Triangle polaire d'un triangle sphérique donné — La propriété est réciproque entre les deux Triangles. — Analogie entre les triangles polaires et les triangles supplémentaires. I-II

Digitized by Google

Énoncés

66 Nombre de conditions nécessaires pour définir un tétraèdre - Pour définir la figure formée par n points de l'espace - Pour qu'un point appartienne à un plan. II R

67 Définition des polyèdres semblables - Qu'appelle-t'on faces homologues de 2 polyèdres semblables I-II

68 Nombre de conditions nécessaires pour que 2 polyèdres soient semblables - De combien s'abaisse ce nombre - de conditions dans les cas particuliers suivants:

Parallélipipèdes, prismes, Pyrmes de pyramides triangulaires, Pyrmes de pyramides quelconques II-R

69 Deux parallélipipèdes sont semblables; lorsqu'ils ont les faces semblables, et semblablement disposées, ou un dièdre égal compris entre deux faces semblables. II

70 Deux polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes de leurs arêtes homologues. I-II

Symétrie

71 Différentes sortes de symétrie - Qu'est ce que les symétriques P', P'', P''' d'un polyèdre P, successivement par rapport à une droite à un point et à un plan — Quel rapport de forme existe-t'il entre ces 3 derniers polyèdres. II

72 Ne peut-on pas voir directement sans passer par la symétrie par rapport à un point, que 2 polyèdres symétriques par rapport à un plan ne sont pas superposables II-R

73 Deux polyèdres symétriques d'un même polyèdre P par rapport à deux plans différents, peuvent coïncider par une rotation autour de l'intersection des deux plans. II-R

74 Deux polyèdres symétriques sont équivalents I-II

75 Conditions pour que deux tétraèdres symétriques soient égaux — II-R

76 » pour que 2 prismes triangulaires symétriques soient égaux. II-R

77 Deux parallélipipèdes symétriques sont toujours égaux — II-R

Homothétie

79 Figures homothétiques directes - Figures homothétiques inverses. II

52- Entre quelles limites peut varier la somme des angles des faces d'un angle triedre - Somme de l'angle triedre dans les cas limites I-II

53 Condition necessaire et suffisante pour qu'avec 3 faces données on puisse construire un angle triedre. I-II

54. Lorsque le problème est possible n'admet il qu'une seule solution - En quoi different les deux triedres qui correspondent au problème. (Ils sont symétriques) II

Surface des polyedres

55 Etant donné un tetraedre et une droite AB dans l'une des faces, mener par cette droite un plan qui divise la surface latérale de la pyramide en deux parties equivalentes II-R

Mesure des volumes.

56 Theoremes qui conduisent à la mesure du parallelipipede I

57 Si par deux arêtes opposées d'un parallelipipede on fait passer un plan, on le partage en deux prismes triangulaires equivalents I-II

58 Condition pour qu'ils soient egaux. II-R

59. Mesure du parallelipipede oblique I-II

60 Mesure du prisme. I

61. Deux pyramides triangulaires de même hauteur, et de bases equivalentes sont equivalentes. I-II

62. Trouver le volume de la pyramide en la considerant comme la limite d'une somme de prismes inscrits et en calculant la limite de cette somme de prismes. II-R

63 Mesure du tronc de pyramide I-II

64 Mesure du solide formé sur les routes par les Pas de pieces II

65 On coupe un tetraedre par un plan oblique à la base mesure du solide determiné dans le Tetraedre par le plan secant. II-R

Conditions qui determinent la forme d'un polyedre — Similitude - Symetrie - Homothetie.

rallèle à un plan donné et on ne peut en mener qu'un seul. I

38 Lieu des droites parallèles à un plan fixe et passant par un point donné. I

39 Si deux plans sont parallèles toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre. I-II

40 Si deux angles ont les côtés parallèles et dirigés dans le même sens, ces angles sont égaux et leurs plans sont parallèles. I

41. La projection d'une ligne droite sur un plan est une ligne droite I-II

42. L'angle aigu d'une droite avec sa projection sur un plan est le plus petit des angles que fait cette droite avec toutes celles qui passent par son pied dans le plan. II

43 Condition nécessaire et suffisante pour qu'un angle droit se projette sur un plan suivant un angle droit. II-R

44. Plus courte distance de deux droites — Elle est une perpendiculaire commune. I-II-R

45 Qu'appelle-t-on ligne de plus grande pente d'un plan — Propriété de la ligne de plus grande pente. II

46 Si deux plans sont perpendiculaires et si d'un point de l'un on abaisse une perpendiculaire sur l'autre, elle sera toute entière dans le premier I-II

Angles trièdres

47 Cas d'égalités des angles triedres II
Qu'entend-t-on par trièdres symétriquement disposés par rapport à une face II-R

48 Si deux trièdres ont deux dadres égaux les faces opposées sont égales. II

49. Que seraient deux angles triedres ayant une face égale et deux dièdres inversement disposés par rapport à cette face II

50 Dans quels cas deux trièdres symétriques sont-ils égaux II

51. Trièdres supplémentaires — Réciprocité qui existe entre les deux trièdres supplémentaires I-II

Digitized by Google

27 Calcul du rapport de la circonférence au diamètre — Méthode des isopérimètres. I-II

28 Mesure du secteur circulaire — Déterminer un secteur circulaire connaissant son périmètre et sa surface — De tous les secteurs de même périmètre, quel est celui qui a la plus grande surface. II-R

Géométrie dans l'espace.

Ligne droite et plan

29 Construire une droite qui s'appuie sur trois droites données I

30 Qu'appelle-t-on droite perpendiculaire sur un plan — Est-il nécessaire qu'une droite soit perpendiculaire sur toutes celles qui passent par son pied dans le plan pour être perpendiculaire au plan I

31 Une droite est perpendiculaire sur un plan lorsqu'elle fait des angles égaux avec 3 droites passant par son pied dans le plan. I-R

32. Un point pris hors d'un plan on peut abaisser une perpendiculaire sur le plan et on ne peut en abaisser qu'une seule. I

33 Construction de la perpendiculaire abaissée d'un point sur un plan. I

34 Théorème des 3 perpendiculaires. — Etant donné une droite lui mener une perpendiculaire dans un plan donné un point où elle perce le plan. I-II

Réciproque du théorème des trois perpendiculaires II

35 Lieu des points de l'espace tels que la différence des carrés de leurs distances à deux points donnés soit égale à un carré donné I

36 Deux droites perpendiculaires sur un même plan sont parallèles. I-II

Deux droites parallèles à une 3e sont parallèles. I-II

37 Par un point donné on peut toujours mener un plan pa-

cotes

II-K

12 Nombre de conditions nécessaires pour que deux polygones soient semblables — À combien ce nombre de conditions s'abaisse-t-il dans les cas particuliers suivants:

Pour triangle, rectangle, trapèze, quadrilatère inscriptible, losange, etc. II-K.

13 Énoncer des théorèmes relatifs à la similitude de ces diverses figures II

14 Étant donné deux polygones d'un même nombre de côtés, reconnaître s'ils sont semblables ou non. II

15 Qu'entend-t-on par polygones symétriques par rapport à un point — Deux polygones symétriques sont-ils superposables. II

16 Homothétie directe et inverse, donne-t-elle des figures différentes. II

Surfaces

17 Par un point pris sur l'un des côtés d'un triangle mener une droite qui divise ce triangle en deux parties équivalentes II

18 Construire un polygone qui soit semblable à un polygone donné et qui soit au premier dans un rapport donné I-II

Polygones réguliers

Cercle.

19 Les apothèmes des polygones réguliers inscrits dans le cercle, ont pour limite le rayon, quand on double indéfiniment le nombre des côtés I

20 Inscrire un décagone régulier dans un cercle I-II

21 Surface du décagone en fonction du rayon du cercle. II

22 Côté du décagone régulier étoilé. II

23 Dans un cercle de rayon 1, on inscrit un décagone régulier on en inscrit un autre dans le cercle décrit avec le côté de ce premier décagone comme rayon, etc. — Limite de la somme des côtés de ces décagones — Limite de la somme de leurs surfaces. I-R.

24 Côté du pentagone régulier inscrit — du pentagone régulier étoilé II

25 Inscrire dans un cercle un polygone de 15 côtés. II

26 Combien y a-t-il de polygones de 15 côtés inscrits dans la circonférence. II

Digitized by Google

N.B. Ne sont pas compris dans ce questionnaire les problèmes de géométrie dont la discussion exige la connaissance de la théorie des equations Ils seront traités dans le 3e. fascicule.

Enoncés des questions de géometrie

1 Cas d'egalités des triangles — Deux triangles qui ont les trois côtés egaux sont egaux — Théorème sur lequel on s'appuie II

2 Dans tout quadrilatère inscrit à un cercle la somme de deux cotés opposés est egale à la somme des deux autres. Réciproque de ce théorème I-R

Lignes proportionelles — Similitude des triangles.

3 Théorème sur la bisectrice de l'angle au sommet d'un triangle — Etant donné un triangle, on mène la bisectrice de l'angle au sommet et de son supplement, de quel lieu font partie les points où ces bisectrices rencontrent la base. I

4 Conditions de similitude des triangles. I

5 Deux triangles qui ont les côtés perpendiculaires sont semblables II

6 Le produit de deux côtés d'un triangle, est egal au carré de la bisectrice de leur angle, plus au produit des segments que cette bisectrice détermine sur le 3e côté I-II

7 Calculer les bisectrices d'un triangle dont les côtés sont donnés I-II

8 Calculer les côtés d'un triangle dont on donne les bisectrices. II

9 Dans tout quadrilatère inscriptible, le rectangle des diagonales est egal à la somme des rectangles des côtés opposés. I

10 Réciproque de ce théorème. I-R.

Similitude des polygones — Symétrie des figures planes — Homothétie

11 Nombre de conditions nécessaires pour déterminer un polygone de n

Digitized by Google

Solutions

Questions

Les racines successives d'un nombre quelconque ont l'unité pour limite.

Supposons d'abord le nombre donné $N > 1$ je dis qu'on peut prendre m assez grand pour que l'on ait

$$\sqrt[m]{N} - 1 < \delta$$

δ étant aussi petit que l'on veut, il suffira de démontrer que m peut être assez grand pour que l'on ait:

$$N < (1+\delta)^m$$

inégalité évidente, puisque:

$$(1+\delta)^m$$

peut croître sans limite. On démontrerait tout aussi facilement le théorème si N était < 1.

Fin des solutions d'arithmologie.

Digitized by Google

à moins d'une unité

Je ne veux pas expliquer ici la méthode à suivre pour extraire la racine $m^{ème}$ d'un nombre, bien qu'elle ne soit qu'une généralisation simple des méthodes employées pour les racines carrées et cubiques. Je démontrerai simplement les deux théorèmes suivants.

1° Pour extraire à une unité près la racine $m^{ème}$ d'un nombre entier N accompagné d'une fraction $\frac{\alpha}{\beta}$, il suffit d'extraire à une unité près la racine $m^{ème}$ de N en négligeant la fraction.

En effet si nous représentons par K la racine $m^{ème}$ de N à moins d'une unité

N sera compris entre:

K^m et $(K+1)^m$

or le nombre entier $(K+1)^m$ surpasse le nombre entier N au moins d'une unité donc: $N+\frac{\alpha}{\beta}$ est aussi compris entre

K^m et $(K+1)^m$

sa racine à moins d'une unité est K.

2° Si on a: $m = pq$

On obtient la racine $m^{ème}$ de N à moins d'une unité en extrayant la racine $p^{ème}$ de N à moins d'une unité et ensuite la racine $q^{ème}$ du résultat à moins d'une unité

Si K est la racine $m^{ème}$ de N à moins d'une unité: N est compris entre:

K^{pq} et $(K+1)^{pq}$

pour savoir la quantité commensurable ou non que l'on y emploie $\sqrt[q]{N}$ est comprise entre:

K^q et $(K+1)^q$

donc aussi:

la $\sqrt[p]{\sqrt[q]{N}}$ à moins d'une unité est comprise entre

K^q et $(K+1)^q$

mais en calculant $\sqrt[p]{\sqrt[q]{N}}$ à moins d'une unité on néglige une quantité moindre que cette unité. Soit A la racine $p^{ème}$ de N à moins d'une unité A étant compris entre K^q et $(K+1)^q$ la racine $q^{ème}$ de A à moins d'une unité est K.

Solutions

$$N \Rightarrow 10^3 n^3 + 3\times 10^2 n^2 (x+1) + 3(10n)(x+1) + (x+1)^3$$
$$N \Rightarrow (10n + x + 1)^3$$

donc le chiffre des unités serait au moins $x+1$ ce que est contre l'hypothèse. La conclusion énoncée subsistera a fortiori, si nous divisons R par une quantité plus grande. Or on a.

$$x+1 \leq 10$$
$$3[n^2 \times 100 + 10n(x+1) + (x+1)^2] \leq 300(n^2+n+1) < 300(n+1)^2$$

donc on aura une limite inférieure du chiffre des unités en divisant R par $300(n+1)^2$ ou en divisant les centaines de R par $3(n+1)^2$

Question 74

Tout nombre qui est à la fois un carré et un cube parfait est une puissance 6e exacte.

Les exposants des facteurs premiers qui entrent dans ce nombre étant divisibles par 2 et par 3 sont divisibles par 6. D'une manière générale tout nombre qui est à la fois une m^e une n^e et une p^e puissance exacte est une puissance d'ordre mnp, si les nombres m, n, p sont premiers entre eux deux à deux.

Questions 75, 76, 77

Qu'entend-t-on par racine 4e d'un nombre à moins d'une unité à moins de $1/m$, à moins de $\frac{p}{q}$ — Moyen de l'obtenir dans ces différents cas.

Pour extraire la racine 4e d'un nombre N à moins d'une unité il suffit d'extraire la racine carrée de ce nombre à moins d'une unité, et d'extraire ensuite la racine carrée du résultat à moins d'une unité. — Mêmes questions pour la racine 6e — Elle peut s'obtenir par une extraction de racine carrée et une extraction de racine cubique.

On appelle racine m^{me} d'un nombre N, le plus grand multiple de $\frac{5}{9}$ dont la puissance m^{me} est inf^{re} à N. Les expressions que nous avons données sur la racine carrée nous disposent de nouveaux détails. On verra facilement que x est la racine m^{me} de :

$$N \frac{q^{m}}{p^{m}}$$

Digitized by Google

à peu près ordre de grandeur N l'on aura:

$$x^2 < \frac{axq^2}{bxp^2} < (x+1)^2$$

x est donc la racine de $\frac{axq^2}{bxp^2}$ à moins d'une unité.

Exemple — Soit proposé d'extraire la racine carrée de:

$\frac{3}{7}$ à $\frac{2}{11}$ près.

On a:

$$\frac{3}{7} \times \frac{11^2}{2^2} = \frac{363}{28} = 12 + \frac{27}{28}$$

$\sqrt{12+\frac{27}{28}}$ à moins d'une unité $= 3$

$\sqrt{\frac{3}{7}}$ à $\frac{2}{11}$ près $= \frac{6}{11}$.

Question. 73.

Connaissant les dizaines de la racine cubique d'un nombre trouver une limite inf^re du chiffre des unités.

Soit:

N le nombre proposé.
n le nombre formé par les dizaines de sa racine cubique
x le chiffre des unités
R le reste que l'on obtient en retranchant du nombre proposé le cube des dizaines de la racine c'est à dire $1000\,n^3$

Je dis d'abord qu'on obtiendrait (1) un chiffre inf^re ou egal aux unités en divisant R par:

$$3\left[n^2 \times 100 + 10n(x+1) + (x+1)^2\right]$$

car si on obtenait un chiffre sup^re à x, $x+p$ on aurait:

$$R = 3\left[n^2 \times 100 + 10n(x+1) + (x+1)^2\right](x+p)$$

$$R = 3\left[n^2 \times 100 + 10n(x+1) + (x+1)^2\right](x+1)$$

(1) x etant supposé connu.

obtenir un resultat plus petit: En effet representons $\sqrt{\frac{a}{b}}$ par une longueur AB, calculer $\sqrt{\frac{a}{b}}$ à moins de $1/m$

revient, à mesurer AB avec une grandeur egale à la $1/m$ partie de l'unité de longueur KH, employée pour representer $\sqrt{\frac{a}{b}}$, et à negliger le reste CB moindre que le $1/m$ de KH. Or il se peut que ce reste soit très voisin de zero, tandisque le reste C'B de la 2e operation et qui est moindre que $\frac{KH}{m'}$ peut être assez voisin de cette quantité et par consequent plus grand que le premier.

Exemple:

Calculons successivement

à $1/10$ et à $1/11$ $\sqrt{\frac{2}{7}}$ près.

Pour calculer $\sqrt{\frac{2}{7}}$ à $1/10$ près, il faut multiplier $\frac{2}{7}$ par 100 ce qui donne:

$28+\frac{4}{7}$

Prendre la racine carrée de cette quantité à moins d'une unité, et diviser le resultat par 10. On trouve ainsi que:

$\sqrt{\frac{2}{7}}$ à $1/10$ près est: $\frac{5}{10}$

on trouvera de même que:

$\sqrt{\frac{2}{7}}$ à $1/11$ près est: $\frac{5}{11}$

resultat plus petit.

Question 71 — Qu'entend-on par racine carrée de $\frac{a}{b}$ à moins de $\frac{p}{q}$, moyen de l'obtenir.

On appelle racine carrée de $\frac{a}{b}$ à moins de $\frac{p}{q}$, le plus grand multiple de $\frac{p}{q}$ dont le carré est inf-q à: $\frac{a}{b}$, soit x ce multiple on aura:

$$\frac{x^2p^2}{q^2} < \frac{a}{b} < \frac{(x+1)^2p^2}{q^2}$$

ces 3 quantités sont rangées par ordre de grandeur, si nous les multiplions par $\frac{q^2}{p^2}$, elles seront encore rangées

Définissons maintenant ce qu'on doit entendre par le symbole $\sqrt{\frac{a}{b}}$ lorsque a et b ne sont pas des carrés parfaits.

On entend par le symbole $\sqrt{\frac{a}{b}}$ la limite vers laquelle tend la racine de $\frac{a}{b}$ à moins de $1/n$, quand n croit indéfiniment.

Reste à démontrer que cette dernière quantité a une limite. Pour cela je remarque que si cette racine est $\frac{x}{m}$ on a par définition:

$$\frac{x^2}{m^2} < \frac{a}{b} < \frac{(x+1)^2}{m^2}$$

La quantité $\frac{a}{b}$ est comprise entre deux autres qui diffèrent de:

$$\frac{1}{m^2} + \frac{2x}{m^2}$$

expression qui a pour limite zero, puisque $1/m^2$ a pour limite zero et que $\frac{x}{m}$ étant une quantité finie $\frac{2x}{m^2}$ a également pour limite zero.

Les deux quantités $\frac{x^2}{m^2}$ et $\frac{(x+1)^2}{m^2}$ ayant une limite commune $\frac{a}{b}$, il en est de même des deux expressions:

$$\frac{x}{m} \quad \text{et} \quad \frac{x+1}{m}$$

Cette dernière limite est par définition $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Enfin répondons à cette dernière question:

« On a calculé $\sqrt{\frac{a}{b}}$ à moins de $1/m$; on a calculé $\sqrt{\frac{a}{b}}$ à moins de $1/m'$, on calcule ensuite $\sqrt{\frac{a}{b}}$ à moins de $1/m''$, $m'' > m'$, obtiendra-t-on nécessairement un résultat plus grand. »

Il est facile de voir qu'on peut dans certains cas

Digitized by Google

ou inversement suivant que l'on aura :

$$\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2 > A \qquad \text{ou} \left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2 < A$$
$$n+\tfrac{1}{4} > A-n^2 \qquad \text{ou} \quad n+\tfrac{1}{4} < A-n^2$$
$$n+\tfrac{1}{4} > r \qquad \text{ou} \quad n+\tfrac{1}{4} < r$$

or comme n et r sont des nombres entiers différant au moins d'une unité, si : $n+\frac{1}{4} > r$ $\quad n > r$ et si : $n+\frac{1}{4} < r$ $\quad n < r$

donc la racine est plus voisine de n ou de $n+1$ suivant que l'on a :

$$n > r \qquad \text{ou} \qquad n < r$$

si toutefois on avait :

$$n = r$$

$n+\frac{1}{4}$ étant $> r$, la racine serait plus voisine de n.

Considérons par exemple les nombres :

41 , 42 , 43

qui ont tous les 3 pour racine à moins d'une unité 6 les restes sont respectivement

5 , 6 , 7

pour :	41	$n > r$	la racine est plus voisine de 6
pour :	42	$n = r$	la racine est encore plus voisine de 6
pour	43	$n < r$	la racine est plus voisine de 7

Question 70. Extraction de la racine carrée d'une fraction $\frac{a}{b}$ à moins de $1/m$ — Sens qu'il faut attribuer à l'opération $\sqrt{\ }$

m' étant plus grand que m obtient-t-on nécessairement un résultat plus grand en extrayant la racine de $\frac{a}{b}$ à moins de $1/m'$.

Limite de ces résultats quand m' croit indéfiniment.

On appelle racine de $\frac{a}{b}$ à moins de $1/m$ le plus grand multiple de $1/m$ $\frac{x}{m}$ tel que $\frac{a}{b}$ soit compris entre :

$$\frac{x^2}{m^2} \text{ et } \frac{(x+1)^2}{m^2}$$

Digitized by Google

venons d'enoncer donne p^r limite inf^re du chiffre des unités 6, le chiffre exact des unités est 7

Remarque ——— (1) Lorsque le nombre formé par les dizaines de la racine a plus d'un chiffre il est completement inutile d'appliquer la regle précedente pour trouver une limite inf^re du chiffre des unités, dans ce cas lorsque la methode ordinaire donne un chiffre des unités trop fort il suffit de le diminuer d'une unité pour avoir le chiffre exact.

Remarquons en effet que le reste est au plus egal au double de la racine, par conséquent si nous conservons les notations précedentes on a:

$$r < 2n \times 10 + 2x + 1$$
$$x^2 + r < 2n \times 10 + (x+1)^2$$

or :

$$R = 2n \times 10 \times x + x^2 + r$$

Pour que la division de R par $2n \times 10$ puisse donner un quotient sup^r à $x+1$, il faudrait que $2n \times 10$ fut contenu plus d'une fois dans x^2+r, or je dis que cela est impossible car $(x+1)^2$ est inf^r à 100 et puisque le nombre n a plus d'un chiffre $2n \times 10$ est sup^r à 100.

Question 65.

On a trouvé la racine carrée d'un nombre N à moins d'une unité reconnaitre à l'aspect du reste si la racine exacte est plus près du nombre trouvé ou du nombre immediatement sup^r.

Soit :

N le nombre donné
n la racine trouvée à moins d'une unité
r le reste

La racine exacte sera plus voisine de n que de $n+1$

---

(1) Cette remarque est extraite de l'arithmetique de M^r. Simon.

Digitized by Google

r le reste de l'extraction de la racine carrée

Je dis que si x était connu, on obtiendrait un quotient au plus egal à x en divisant R par:

$$2nx10 + x + 1$$

Car si cette division fournissait un quotient supᵉ à x, $x+p$ On aurait:

$$R => (2nx10 + x + 1)(x+p)$$

et à fortiori:

$$R => (2nx10 + x + 1)(x+1)$$

$$N => n^2x100 + 2nx10(x+1) + (x+1)^2$$

N serait au moins egal à:

$$(10n + x + 1)^2$$

le chiffre des unités serait au moins $x+1$ ce qui est contre l'hypothèse.

Ne la vérité x n'est pas connu mais nous savons que l'on a:

$$x+1 <= 10$$

les conclusions précédentes subsisteront à fortiori si au lieu de diviser: R par $2nx10 + x + 1$ nous divisons R par:

$$2nx10 + 10 = (2n+1)10$$

mais pour cela il suffit de diviser les dizaines de R par $2n+1$. Donc:

« On obtiendra une limite infᵉ du chiffre des unités en divisant les dizaines du reste par le double des dizaines de la racine, augmenté d'une unité. »

Exemple:

Soit proposé d'extraire la racine carrée de: 297

297	17
197	27x7
6	

Le nombre des dizaines de la racine est = 1.

La règle ordinaire consistant à diviser les dizaines du reste par le double des dizaines de la racine donne pour limite supᵉ du chiffre des unités 9, la règle que nous

Digitized by Google

Soit D le dénominateur, supposons que l'on ait :

$$D = 2^n 3^{n'}$$

Si n est pair et supérieur à $2n'$, le nombre des chiffres duodécimaux sera : $\frac{n}{2}$ car on pourra obtenir une fraction duodécimale, équivalente à la fraction donnée, en multipliant les deux termes de la fraction donnée par :

$$3^{2-n'}$$

Si au contraire n' est plus grand que $\frac{n}{2}$ le nombre des chiffres duodécimaux sera n'.

Supposons en second lieu n impair et égal à :

$$2p+1$$

le nombre des chiffres duodécimaux sera égal au plus grand des deux nombres :

$$p+1 \quad \text{ou} \quad n'.$$

En général pour qu'une fraction écrite dans le système dont la base est a, puisse être convertie en une autre fraction dont le dénominateur soit une puissance de la base, il faut que le dénominateur de la fraction donnée soit uniquement composé des facteurs premiers de la base. Lorsque la conversion ne sera pas possible on obtiendra une fraction périodique simple ou périodique mixte suivant que le dénominateur de la fraction donnée ne contiendra aucun des facteurs de la base, ou contiendra à la fois certains facteurs de la base et d'autres facteurs.

Question 63 — Un a trouvé les dizaines de la racine carrée d'un nombre, trouver une limite inf^re du chiffre des unités

---

Soit :

N le nombre proposé

n le nombre formé par les dizaines de sa racine carrée.

x le chiffre des unités

R le reste obtenu en retranchant de N le carré des dizaines de la racine

Digitized by Google

multiple.

Car il contient tous les facteurs premiers qui entrent dans les nombres avec des exposants au moins égaux aux plus grands exposants qu'ils ont dans les nombres.

Question 49 — Qu'appelle-t'on prendre le quotient de deux nombres a et b à moins de $\frac{1}{q}$

C'est chercher le plus grand multiple de $\frac{1}{q}$ contenu dans $\frac{a}{b}$

Pour l'obtenir il suffit de diviser $\frac{a}{b}$ par $\frac{1}{q}$ ce qui donne :

$$\frac{aq}{bp}$$

et de déterminer le quotient des nombres aq et bp à moins d'une unité.

Questions 52 et 53 — Condition pour qu'une fraction écrite dans le système duodécimal puisse être convertie en fraction duodécimale — Nombre des chiffres duodécimaux lorsque la conversion est possible — Même question pour une fraction écrite dans le système dont la base est a :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction ordinaire puisse être convertie en décimales, est : que le dénominateur ne contienne pas d'autres facteurs premiers que 2 et 5. Le raisonnement employé pour une fraction écrite dans le système décimal, subsiste pour une fraction duodécimale, et nous trouvons ainsi que pour la possibilité de la conversion il est nécessaire et suffisant que le dénominateur ne contienne pas d'autres facteurs premiers que 2 et 3. Quant au nombre des chiffres duodécimaux que l'on obtient lorsque la conversion est possible, il dépend des exposants des facteurs 2 et 3 au dénominateur.

Digitized by Google

Le théorème est évident si l'on remarque que chaque facteur premier entre dans le produit avec la somme des n exposants qu'il a dans les nombres, dans le produit plus grand commun diviseur de leurs produits $n-1$ à $n-1$ avec la somme des $n-1$ plus petits exposants, enfin dans le plus petit multiple avec son plus grand exposant.

Question 41.

Si en divisant un nombre par deux autres les quotients obtenus sont premiers entre eux, ce nombre est le plus petit multiple des deux autres.

Soit N un nombre qui divisé par deux autres nombres b et c donne des quotients premiers entre eux : q et q'. Je dis que N est le plus petit multiple de b et c. En effet nous avons par hypothèse :

$$N = bq = cq' \quad (1)$$

q' divisant bq et étant premier avec q divise b on a :

$$b = dq' \quad (2)$$

et par suite :

$$c = dq$$

Les quotients de b et c par d étant premiers entre eux, d est le plus grand commun diviseur de ces deux nombres. Mais la relation (2) donne :

$$q' = \frac{b}{d}$$

et par suite :

$$N = \frac{bc}{d}$$

N étant le quotient du produit des deux nombres par leur plus grand commun diviseur est leur plus petit multiple.

Question 42.

Lorsqu'un nombre est divisible par plusieurs nombres premiers entre eux deux à deux, il est divisible par leur plus petit

Lorsqu'en divisant deux nombres par un 3e les quotients obtenus sont premiers entre eux — le 3e nombre est le plus grand commun diviseur des deux premiers — Question 32.

Supposons qu'en divisant deux nombres a et b par un 3e d on trouve des quotients premiers entre eux : q et q'. Je dis que d est le plus grand commun diviseur des nombres a et b.

Car si d n'est pas le plus grand commun diviseur des nombres a et b soit D ce plus grand commun diviseur ; d diviseur D soit K le quotient. On aura :

$$D = d\,K$$

mais alors en divisant a et b par D on trouverait pour quotients :

$$\frac{q}{K} \quad ; \quad \frac{q'}{K}$$

les nombres q et q' admettant un diviseur K ne seraient pas premiers entre eux ce qui est contre l'hypothèse.

Question 37

Le produit de deux nombres peut s'obtenir en multipliant leur plus petit multiple par leur plus grand commun diviseur

---

L'exposant d'un facteur premier dans le produit de deux nombres est la somme des exposants qu'il a dans les nombres, or on sait qu'un facteur premier entre dans le plus petit multiple avec son plus grand exposant et dans le plus grand commun diviseur avec son plus petit exposant. Le théorème énoncé est une conséquence évidente de ces deux remarques

---

Question 38. — Le plus petit multiple de n nombres est égal à leur produit divisé par le plus grand commun diviseur de leurs produits n-1 à n-1.

Digitized by Google

Solutions

D'après cela le nombre des divisions à effectuer ne saurait surpasser

$$\frac{9K}{L_2}$$

ou 7 fois le nombre des chiffres du plus petit nombre 7 étant sup^{re} à : (1)

$$\frac{2}{\gamma(2)}$$

Dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres, on peut toujours s'arranger de manière que chaque reste soit inf^{r} à la moitié du diviseur, il suffit pour cela d'augmenter le quotient d'une unité, lorsque cette circonstance ne se présente pas. (2) En opérant de cette manière on trouve :

$$\frac{K}{L_2}$$

comme limite du nombre des divisions à effectuer. Le nombre des divisions à effectuer n'est inf^{r} à 4 fois le nombre des chiffres du plus petit nombre.

---

(1) Mr Lamé a trouvé que le nombre des divisions à effectuer ne saurait excéder 5 fois, le nombre des chiffres du plus petit nombre. On peut lire l'analyse remarquable de Mr Lamé dans l'arithmétique de Mr Perret.

---

(2) Lorsqu'on augmente le quotient d'une unité, le produit du diviseur par le quotient devient sup^{re} au dividende. Si B et R désignent le diviseur et le reste quand on ne force pas le quotient. En augmentant le quotient d'une unité le reste sera B − R. Il sera inf^{r} à $\frac{B}{2}$ si R lui est supérieur.

Digitized by Google

on aura à diviser b par un nombre sup^{r} à $\frac{b}{2}$ par conséquent le quotient sera l'unité et le reste sera inf^{r} à $\frac{b}{2}$.
D'après cela si: B designe le plus petit des deux nombres entre lesquels on cherche le plus grand commun diviseur, $r_1, r_2, r_3 \ldots$ les restes successifs que l'on obtient on aura les inegalités suivantes:

$$\begin{cases} 2r_2 < B \\ 2r_4 < r_2 \end{cases}$$

$$\ldots$$

$$2r_{2n} < r_{2n-2}$$

multipliant ces inegalités membre à membre, il vient:

$$2^n r_{2n} < B$$

cette dernière inegalité montre que si r_{2n} est sup^{r} à l'unité c'est à dire si l'on est obligé de faire plus de $2n$ operations pour trouver le plus grand commun diviseur des deux nombres on a:

$$2^n < B$$

mais elle prouve aussi que si l'on a:

$$2^n => B$$

on devra avoir

$$r_{2n} =< 1$$

c'est à dire que r_{2n} devra etre l'unité ou zero, puisque les restes successifs sont des nombres entiers.

Donc si n designe un nombre tel que 2^n ne soit pas inferieur à B le nombre des divisions à effectuer ne sera pas superieur à $2n$.

On peut donner à ce resultat une autre forme ou entier d'une manière explicite le nombre des chiffres du plus petit nombre. Soit K le nombre des chiffres de B, B sera inf^{r} à:

$$10^K$$

des lors il suffira de trouver un nombre n qui satisfasse à l'inegalité.

$$2^n => 10^K$$

$$n => \frac{K}{\log 2} \qquad 2n => \frac{2K}{\log 2}$$

7 est une limite sup^{re} de la quantité $\frac{2K}{\log 2}$.

Si les deux nombres a et b ne sont pas premiers entre eux soit p leur plus grand commun diviseur

Posons: $\frac{a}{p} = a'$ $\frac{b}{p} = b'$

Dans ce cas on n'obtiendra plus que $(a'-1)$ restes différents.

Les $(a'-1)$ premiers termes de la progression

$$b \quad 2b \quad \ldots \quad (a'-1)b \qquad (2)$$

donneront tous des restes différents, car si l'un d'eux Kb était divisible par a, Kb' serait divisible par a', et si deux termes Kb et $K'b$ donnaient le même reste $(K-K')b'$ serait divisible par a'.

Si nous supposons la suite (2) prolongée le terme $a'b$ sera divisible par a, et à partir de ce terme, les restes se reproduiront dans le même ordre. —

— Nous avons supposé jusqu'ici que la progression arithmétique avait pour premier terme 0. Si le 1er terme est c, on verrait facilement que si a est premier avec b, on obtiendra les restes

$$0, \quad 1, \quad 2 \ldots \quad a-1$$

dans un certain ordre, en divisant les a premiers termes:

$$c \qquad c+b \qquad \qquad c+(a-1)b$$

et que si a et b ont un plus grand commun diviseur p, on n'obtiendra les restes:

$$0 \qquad 1 \qquad 2 \qquad \qquad a'-1$$

en divisant par a les a' premiers termes:

$$c \qquad c+b \qquad c+2b \qquad \ldots \qquad c+(a'-1)b$$

et que dans les deux cas si l'on prolonge les progressions les restes se reproduisent périodiquement dans le même ordre.

Question 29

Limite du nombre des divisions à effectuer pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres.

Pour trouver cette limite nous nous appuierons sur ce que le reste d'une division quelconque est toujours inf. à la moitié du diviseur de la division précédente. Soit b le diviseur d'une division, r le reste, si r est $<$ que $\frac{b}{2}$ il en sera à fortiori de même dans la division suivante, et si r est $>$ que $\frac{b}{2}$ dans la division suivante

Suite

autrement dit, elle sera représentée par la formule:

$$\frac{(a^{x+1}-1)(b^{y+1}-1)(c^{z+1}-1)}{(a-1)(b-1)(c-1)}$$

On trouvera tout aussi facilement la somme des puissances semblables des diviseurs d'un nombre. La somme des p^{mes} puissances de ces diviseurs s'obtiendra en faisant le produit des 3 sommes.

$$1 + a^p + a^{2p} \quad \ldots\ldots \quad + a^{xp}$$
$$1 + b^p + b^{2p} \quad \ldots\ldots \quad + b^{yp}$$
$$1 + c^p + c^{2p} \quad \ldots\ldots \quad + c^{zp}$$

Elle sera représentée par la formule:

$$\frac{[a^{(x+1)p}-1][b^{(y+1)p}-1][c^{(z+1)p}-1]}{[a^p-1][b^p-1][c^p-1]}$$

Question 27 — Périodicité des restes que l'on obtient en divisant par un même nombre les termes d'une progression arithmétique

---

Considérons deux nombres a et b premiers entre eux. Je dis que si je divise par a les termes de la suite:

$$b \quad 2b \quad 3b \quad \ldots\ldots \quad (a-1)b \qquad (1)$$

j'aurai pour restes les nombres:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots\ldots \quad (a-1)$$

dans un certain ordre.

D'abord aucun des termes de la suite (1) n'est divisible par a. Car si un terme kb était divisible par a a diviserait k ce qui est impossible puisque a est sup^{re} à k.

En second lieu deux termes quelconques divisés par a donnent des restes différents car si deux termes kb et k'b donnaient le même reste, a devrait diviser la différence k-k'.

Si nous supposons la suite (1) prolongée à partir du terme (a+1)b les mêmes restes se reproduiront périodiquement dans le même ordre.

Digitized by Google

	Solutions			
2e classe ou classe des Unités	une unité du 4e ordre	= mult 7 + 6	= mult 7	− 1
	" du 5e ordre	= mult 7 + 4	= mult 7	− 3
	" du 6e ordre	= mult 7 + 5	= mult 7	− 2
3e classe	comme la 1re.			

Ce tableau permet d'enoncer la regle suivante pour trouver le reste de la division d'un nombre par 7:

On partage le nombre en tranches de trois chiffres à partir de la droite. Le nombre se trouve ainsi en classes d'unités. On multipliera par 1, 3, 2 les unités du 1er ordre, 2e ordre et 3e ordre de chaque classe impaire. On fera de même pour les classes d'ordre pair. Comme le nombre proposé est egal à un multiple de 7 augmenté de la somme correspondante aux tranches impaires et diminuée de la somme correspondant aux tranches paires on retranchera la 2e somme de la 1re et le reste de la division du nombre par 7 sera le reste de la division par 7 de cette difference.

Si la soustraction n'etait pas possible on pourrait toujours la rendre possible en augmentant la 1re somme d'un multiple de 7 convenable

---

Question 23 — Somme des diviseurs d'un nombre.

Soit $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$

On sait qu'on peut obtenir tous les diviseurs de N en ecrivant les suites

$$\begin{array}{llllll} 1 & a^1 & a^2 & a^3 & \ldots & a^\alpha \\ 1 & b^1 & b^2 & b^3 & \ldots & b^\beta \\ 1 & c^1 & c^2 & c^3 & & c^\gamma \end{array}$$

et en multipliant tous les termes de la 1re suite par ceux de la 2e et tous les resultats par ceux de la 3e. Si donc S, S', S'' designent respectivement ces 3 sommes il est clair que la somme des diviseurs de N sera $SS'S''$.

Digitized by Google

On démontre de la même manière que l'unité suivie d'un nombre impair de zéros est égale à un multiple de a+1 −1, que l'unité suivie d'un nombre pair de zéros est égale à un multiple de a+1 augmenté de 1.

Qu'un nombre quelconque est un multiple de a+1 augmenté de la somme de ses chiffres de rang impair à partir de la droite et diminuée de la somme de ses chiffres de rang pair.

Question 17.

Caractères de divisibilité d'un nombre par un diviseur quelconque – Moyen de trouver ces caractères en prenant pour exemple le diviseur 7.

Les caractères de divisibilité d'un nombre par 7 apparaissent facilement lorsqu'on sait trouver le reste de la division par 7 d'une unité d'un ordre quelconque. Pour cela il suffit d'effectuer la division par 7 de l'unité suivie d'un nombre quelconque de zéros et d'examiner l'ordre de succession des restes. On sait d'ailleurs qu'on ne peut pas trouver plus de 6 restes différents.

1 0 0 0 0 0 0 0 0 0	7
3 0	1 4 2 8 5 7 ...
2 0	
6 0	
4 0	
5 0	
1 0	

Les restes se reproduisent dans l'ordre 1, 3, 2, 6, 4, 5
Ce qui permet de former le tableau suivant :

1re classe ou classe des unités simples	une unité du 1er ordre	=	mul 7 +1
	une unité du 2e ordre	=	mul 7 +3
	une unité du 3e ordre	=	mul 7 +2

mais il faut remarquer que:

$\frac{N}{ab}$

termes ont déjà été éliminés, lorsqu'on a supprimé les termes divisibles par a, on a par ce fait même supprimé ceux qui sont divisibles par ab. Cette 2e élimination ne fera donc disparaître qu'un nombre de termes egal à:

$$\frac{N}{b} - \frac{N}{ab} = \frac{N}{b}\left(1-\frac{1}{a}\right)$$

il ne restera donc plus après les deux premières éliminations qu'un nombre de termes egal à:

$$N\left(1-\frac{1}{a}\right) - \frac{N}{b}\left(1-\frac{1}{a}\right) = N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)$$

Reste encore à faire disparaître de cette nouvelle suite les termes divisibles par c, il y en a:

$\frac{N}{c}$

de 1 à N, mais il faut tenir compte de ceux qui ont déjà été supprimés et dont le nombre s'eleve à:

$$\frac{N}{ac} + \frac{N}{bc} - \frac{N}{abc} = \frac{N}{c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{ab}\right)$$

la 3e élimination ne fera donc disparaître en realité qu'un nombre de termes egal à:

$$\frac{N}{c} - \frac{N}{c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{ab}\right) = \frac{N}{c}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)$$

donc enfin après les trois éliminations, il restera un nombre de termes egal à:

$$N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)$$

c'est la formule d'Euler

Question 17- Caractères de divisibilité d'un nombre par 11 dans le système dont la base est 10 - Caractère de divisibilité par a+1 dans le système dont la base est a.

Les caractères de divisibilité par a+1 dans le système dont la base est a sont identiques aux caractères de divisibilité d'un nombre par 11 dans le système dont la base est 10.

Digitized by Google

Comparaison des differents systemes de numeration.

On peut se demander pourquoi entre tant de systèmes de numeration on a choisi le systeme decimal. Il est probable que la conformation de notre main est la cause de ce choix. Du reste tous les autres systèmes ont plus ou moins d'inconvenients. Les uns donnent pour les nombres une representation trop longue, les autres exigent la connaissance d'un trop grand nombre de resultats numeriques. Pour pouvoir calculer dans un systeme quelconque de numeration il faut savoir par coeur les resultats de l'addition ou de la multiplication de deux nombres d'un seul chiffre. Toutefois il est probable que si les geometres avaient été appelés à choisir un systeme de numeration ils auraient donné la préference au systeme duodecimal, car la base étant divisible par 2, 3, 4, 6 diviseurs que leur simplicité rend tres usuels.

Question 4 — Nombre des chiffres du produit d'un nombre de m chiffres par un nombre de n chiffres.

Un nombre de m chiffres est compris entre 10^{m-1} et 10^m, par conséquent le nombre des chiffres du produit sera: $m+n-1$ ou $m+n$.

Trouver dans la suite naturelle des nombres combien il existe de nombres inf^rs à un nombre premier N et premiers avec lui.

Soit:

$N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ — le problème revient à chercher combien il existe de nombres inf^rs à N et ne contenant aucun des facteurs: $a, b, c \ldots$

Dans la suite des nombres depuis 1 jusqu'à N supprimons ceux qui sont divisibles par a. Il faudra faire $\frac{N}{a}$ suppressions, les nombres divisibles par a se succedant de a^{en} en a. Il restera dans la suite un nombre de termes egal à:

$$N - \frac{N}{a} = N\left(1 - \frac{1}{a}\right)$$

Dans cette suite il faut supprimer les termes divisibles par b, il y en a: $\frac{N}{b}$ de 1 à N.

Digitized by Google

Solutions.

Proposons-nous d'abord la 1re question:

Un nombre étant écrit dans le système décimal, l'écrire dans le système duodécimal.

Il est clair que si nous divisons le nombre donné par 12, le reste exprimera combien il contient d'unités simples dans le système duodécimal et le quotient combien il contient de douzaines d'unités simples c'est à dire d'unités du 2e ordre. Si p est le quotient et r le reste, le nombre proposé contient r unités du 1er ordre et p du 2e. Si p est supérieur à 11, nous diviserons encore p par 12. Le reste exprimera combien le nombre renferme d'unités du 2e ordre, et le quotient combien il contient d'unités du 3e ordre. En continuant ainsi on connaîtra combien le nombre contient d'unités de chaque ordre et par conséquent on sera en mesure d'écrire le nombre.

On dispose ordinairement le calcul de la manière suivante.

59321	12	12	12	
113	4943	411	34	12
52	14	51	10=α	2
41	23	3		
5	11=β			

Le nombre 59321 sera représenté dans le système duodécimal par:

2α3β5

Inversement un nombre étant écrit dans le système duodécimal proposons nous de l'écrire dans le système décimal. Supposons qu'il s'agisse du nombre:

2α3β5

Nous multiplierons les unités simples du nombre donné par 1, les unités du 2e ordre par 12, les unités du 3e ordre par 12^2, les unités du 4e ordre par 12^3 etc. et nous ajouterons les différents résultats:

$$
\begin{aligned}
5 \times 1 &= 5 \\
11 \times 12 &= 132 \\
3 \times 12^2 &= 432 \\
10 \times 12^3 &= 17280 \\
2 \times 12^4 &= 41472 \\
\hline
&\quad 59321
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

Solutions

Pour écrire les nombres on a commencé par représenter les n-1 premiers nombres par n-1 caractères différents appelés chiffres. Ces chiffres permettent d'indiquer combien un nombre contient d'unités de chaque ordre. Reste à employer un moyen pour que l'ordre d'unités marqué par un chiffre soit clairement indiqué. La manière la plus simple d'arriver à ce but est de faire marquer à un chiffre l'ordre des unités qu'il représente par sa position par rapport aux autres, en convenant qu'un chiffre placé à la gauche d'un autre représente des unités de l'ordre immédiatement supérieur. S'il manque des chiffres d'un certain ordre, on l'indiquera par un caractère particulier appelé zéro*.

Système duodécimal

Dans ce système douze unités d'un certain ordre valent une unité de l'ordre immédiatement supérieur. On se sert pour écrire les nombres des douze caractères.

0.1.2.3.4.5 6.7.8.9.d.ß.

Rien n'est plus simple que de passer d'un système de numération à un autre, par exemple du système décimal au système duodécimal ou inversement du système duodécimal au système décimal.

---

* L'emploi du zéro n'est pas complètement indispensable; il ne fournit même pas toujours le mode de représentation le plus simple des nombres. On pourrait indiquer qu'il manque certains ordres d'unités en rappelant par un Numéro l'ordre d'un chiffre lorsque cet ordre n'est pas indiqué par sa position. Considérons par exemple le nombre:

5000000 30047

ce nombre pourrait être écrit $5^{12}\,3^{5}\,47$

mais ce mode de représentation aurait de graves inconvénients au point de vue du calcul.

Solutions des questions d'arithmétique.

Questions 2, 3. — Idées fondamentales qui président à l'établissement d'un système quelconque de numération — Unités de différents ordres — Système duodécimal. — Comparaison des différents systèmes de numération.

D'une manière générale, le nombre est le résultat de la mesure d'une grandeur, l'idée de nombre nous est fournie par la considération simultanée de divers objets.

Un système quelconque de numération doit se proposer de désigner les nombres à l'aide d'un nombre limité de mots, et de les représenter à l'aide d'un nombre limité de caractères. — De plus l'énoncé d'un nombre doit être court et sa représentation doit être simple

Pour obtenir ce résultat, dans les différents systèmes de numération, on a commencé par donner des noms différents aux $n-1$ premiers nombres n'variant d'un système à un autre, et représentant ce que l'on appelle la base du système. On est convenu ensuite, que n unités simples formeraient une nouvelle espèce d'unité appelée unité du 2e ordre, et poursuivant l'analogie que n unités du 2e ordre formeraient une unité du 3e ordre; dès lors pour énoncer un nombre il suffit de dire combien il contient d'unités de chaque ordre.

Digitized by Google

Questions d'arithmetique

Racine cubique.

72 Exposer sur un exemple numerique la theorie de l'extraction de la racine cubique d'un nombre entier II

73 Ayant trouvé les dizaines de la racine cubique d'un nombre trouver une limite inferieure du chiffre des unités. II. R

Puissances et racines de degrés supérieurs.

74 Tout nombre qui est à la fois un carré et un cube parfait est une puissance 6e exacte. I. R

75 Qu'entend-on par racine 4e d'un nombre à moins d'une unité à moins de 1/m - à moins de $\frac{1}{q}$. - 76. Moyen de l'obtenir dans ces différents cas II. R.

77 Mêmes questions pour la racine 6e. II. R

78 Les racines successives d'un nombre ont l'unité pour limite I. R

Questions diverses

79 Diviser 7 en parties proportionnelles aux nombres 1/3, 4/5 et 3/2. I

80. Un alliage pese 500 gr. et est au titre de 0,800 quel poids d'or faut-il ajouter pour elever le titre à 0,850 II

Fin des questions.

Explication de la notation employée dans cette table.

I - placé à la suite d'une question indique qu'elle a été posée aux examens du 1er degré

II - aux examens du 2e degré.

R - qu'elle est resolue dans ce recueil.

Digitized by Google

tats sont ils identiques II

58 Condition nécessaire et suffisante pour qu'en convertissant une fraction ordinaire en décimales, on obtienne une fraction périodique simple une fraction périodique mixte. I-II

Carrés et racines carrées

59 Lorsqu'un nombre est carré parfait, les exposants des facteurs premiers qui entrent dans ce nombre sont pairs I

60 Lorsqu'un nombre n'est pas le carré d'un nombre entier, il n'est pas non plus le carré d'une fraction I

61 Sens qu'il faut attacher à la racine carrée d'un nombre qui n'est pas carré parfait — Définition du symbole $\sqrt{2}$ II

62 Exposer sur un exemple numérique la méthode à suivre pour extraire la racine carrée d'un nombre entier. II

63 Lorsqu'on a trouvé les dizaines de la racine carrée d'un nombre la méthode ordinaire fournit une limite sup^re du chiffre des unités, ne peut-on pas trouver une limite inf^re de ce même chiffre II.R

65 Un a trouvé la racine carrée d'un nombre à moins d'une unité reconnaître à l'aspect du reste, si la racine exacte est plus près du nombre trouvé ou du nombre immédiatement sup^r. I-R

66 Connaissant plus de la moitié des chiffres de la racine carrée d'un nombre, on demande de trouver les autres à l'aide d'une simple division. I-II

67 Preuve par 9 de la racine carrée. I

68 Sens qu'il faut attribuer à $\sqrt{\frac{a}{b}}$ lorsque b est un carré parfait sans que a le soit. II

69. Extraire la racine carrée d'un nombre fractionnaire à une unité près — II

70 Extraction de la racine carrée d'une fraction $\frac{a}{}$ à moins de $\frac{1}{m}$ - Sens qu'il faut attribuer à l'opération — Comment varie la racine lorsqu'on fait croître m. II-R

71 Qu'entend-on par racine carrée d'un nombre A à moins de $\frac{p}{q}$ moyen de l'obtenir I-II.R

Digitized by Google

dénominateur commun. I-II

46 Dans quel cas le plus petit dénominateur commun de plusieurs fractions est-il identique au produit des dénominateurs. I-II

47 Quels nombres autres que le produit des dénominateurs et leur plus petit multiple peut-on prendre pour dénominateur commun de plusieurs fractions. I.

48 Division des fractions, l'exposer sur un exemple numerique II

49. Qu'appelle-t-on prendre le quotient de deux nombres a et $\frac{p}{q}$ à moins de $\frac{p}{q}$ I

Fractions decimales.

50 Dans un produit de deux facteurs on peut intervertir l'ordre des facteurs, sans altérer la valeur du produit - Extension du theoreme au cas de deux nombres decimaux, de deux nombres incommensurables I

51 Dans quel cas peut-on convertir une fraction ordinaire en decimales - Nombre de chiffres decimaux que l'on obtient lorsque la conversion peut se faire exactement I-II

52. Une fraction etant ecrite dans le système duodecimal, dans quel cas peut-elle être convertie en fraction duodecimale, nombre des chiffres duodecimaux que l'on obtient lorsque la conversion est possible II-R.

53 Même question pour le système dont la base est 8 - Enoncé du theoreme general, a etant la base du système II-R.

54 Qu'appelle-t-on fraction decimale periodique simple, fraction generatrice. I-II

55 Fraction génératrice d'une fraction periodique simple d'une fraction periodique mixte. I-II

56 Si on considere la fraction periodique simple 0,434343... la fraction generatrice est-elle rigoureusement representée par la fraction $\frac{43}{99}$ ou commet-on une certaine erreur. II.R

57. Si on considère $\frac{43}{99}$ la fraction decimale 0,434343. on trouve $\frac{43}{99}$ ou $\frac{4343}{9999}$ suivant que l'on prend deux ou quatre chiffres pour la periode, ces deux resul-

Digitized by Google

Questions d'arithmétique

nombre est le plus grand commun diviseur des 3 premiers — I — R.

33 — Plus grand commun diviseur de 3 nombres — Le trouver sans chercher d'abord le plus grand commun diviseur des deux premiers. II

34 — Soient A, B, C 3 nombres rangés par ordre de grandeur, pour trouver leur plus grand commun diviseur il suffit de diviser A et B par C, soient R et R' les restes des deux divisions on cherche ensuite le plus grand diviseur entre R, R' et C. II

35 — Plus grand commun diviseur de plusieurs nombres, le trouver sans décomposer ces nombres en leurs facteurs premiers. II

36 — Dans quel cas est-il plus avantageux d'effectuer la décomposition des nombres en leurs facteurs premiers, dans quel cas de ne pas l'effectuer II

37 — Plus petit multiple de deux nombres — Le plus petit multiple de deux nombres peut s'obtenir en divisant leur produit par leur plus grand commun diviseur I — II. R.

37 Ce théorème s'étend-il à plusieurs nombres. I — II

38. Le plus petit multiple de plusieurs nombres peut s'obtenir en divisant leur produit par le plus grand diviseur de leurs produits n-1 à n-1 II — R.

39. — Trouver le plus petit multiple de plusieurs nombres, sans décomposer ces nombres en leurs facteurs premiers. II

40 — Lorsqu'on divise le plus petit multiple de deux nombres par chacun de ces nombres, les quotients obtenus sont premiers entre eux. I

41 — Réciproquement si en divisant un nombre par deux autres les quotients obtenus sont premiers entre eux, le premier nombre est le plus petit multiple des deux autres I — R.

42 — Quant un nombre est divisible par plusieurs nombres non premiers entre eux deux à deux il est divisible par leur plus petit multiple II — R.

Fractions ordinaires

43 — Fraction irréductible — Comment réduit-on une fraction à sa plus simple expression — Théorème sur lequel on s'appuie — I — II

44 — Quels sont les nombres que l'on peut ajouter aux deux termes d'une fraction, sans en altérer la valeur — II

45. Réduction des fractions au même dénominateur, au plus petit

Digitized by Google

Questions d'arithmétique —

quelconques de ces nombres le sont aussi. I-II

— Caractères de divisibilité —

17— Caractères de divisibilité d'un nombre par 11 dans le système dont la base est 10 — Caractères de divisibilité d'un nombre par 12 dans le système dont la base est 11 par a+1 dans le système dont la base est a. II-R.

18. Caractères de divisibilité par un nombre quelconque — Prendre pour exemple le diviseur 7 II. R

19— Quand un nombre est divisible par plusieurs nombres premiers entre eux deux à deux il est divisible par leur produit II

20 — La condition énoncée est suffisante est-elle nécessaire. II

21 — Caractères de divisibilité d'un nombre par 8 et 24 II

22 — 9 Par 15, par 33 II

23 — Démontrer que le produit $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6 — I-II

24 — Deux nombres étant décomposés en leurs facteurs premiers, reconnaître si ces deux nombres sont divisibles l'un par l'autre I-II

25— Formation des diviseurs d'un nombre — Nombre de ces diviseurs — Somme des diviseurs d'un nombre II — R

26 — Un nombre a ne divise ni b ni c, que faut-il pour qu'il puisse diviser le produit bc I

27 — Périodicité des restes que l'on obtient en divisant par un même nombre les termes d'une progression arithmétique II — R.

Plus grand commun diviseur — Plus petit multiple —

28 — Tout nombre qui en divise deux autres divise leur plus grand commun diviseur. I-II

29— Limite du nombre des opérations à faire pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres II — R

30 — Diviseurs communs à deux nombres — Nombre de ces diviseurs — Somme de ces diviseurs. II

31— Lorsqu'on divise deux nombres par leur plus grand commun diviseur les quotients obtenus sont premiers entre eux. I

32 — Réciproquement si en divisant deux nombres par un 3e les quotients obtenus sont premiers entre eux, ce 3e nombre

Digitized by Google

Enoncés des questions d'arithmetique

1 — Principes sur lesquels reposent notre système de numeration parlé — Notre système de numeration ecrite. II

2 — Idées fondamentales qui president à l'etablissement d'un système quelconque de numeration — Unités de differents ordres. II R.

3 — Système duodecimal — Comparaison des differents systèmes de numeration II R.

Operations sur les nombres entiers.

4 — Nombre des chiffres du produit d'un nombre de m chiffres par un nombre de n chiffres I — R.

5 — Dans un produit de plusieurs facteurs on peut intervertir l'ordre des facteurs sans alterer la valeur du produit. I

6 — Pour multiplier un produit de plusieurs facteurs par un nombre il suffit de multiplier l'un des facteurs par ce nombre I

7 — Theorie de la division des nombres entiers exposée sur un exemple numerique II

8 — Pour diviser un nombre par un produit de plusieurs facteurs il suffit de le diviser successivement par chacun des facteurs du produit I

Nombres premiers.

9 — Qu'appelle-t-on nombres premiers absolus — Nombres premiers entre eux I-II

10 — Limite du nombre des operations à faire pour reconnaitre si un nombre est premier ou non. I-II

11 — a et b etant des nombres premiers $a^2 - b^2$ pourrait-il etre un nombre premier I — R.

12 — Demontrer que la suite des nombres premiers est illimitée I-II

13 — Construire une table des nombres premiers depuis 1 jusqu'à N — II

14 — Tout nombre qui divise un produit de 2 facteurs et qui est premier avec l'un d'eux divise l'autre. I-II

15 — Decomposer un nombre en ses facteurs premiers — La decomposition n'est possible que d'une maniere II

16 — Quand deux nombres sont premiers entre eux, deux puissances

Digitized by Google

Avertissement.

Cet ouvrage contient à la fois des questionnaires détaillés, sur toutes les parties du cours de spéciales, et les solutions des principaux problèmes posés dans les examens. Certaines solutions se rapportent en outre à des questions théoriques qui ne sont pas traitées dans les ouvrages d'enseignement les plus répandus, ou qui n'y sont pas considérées tout à fait, au point de vue spécial sous lequel elles ont été posées dans les examens. Bien que le titre de l'ouvrage semble ne se rapporter qu'au concours de 1869, j'ai cru devoir joindre dans les énoncés et les solutions quelques questions posées en 1868. Je dois des remercîments à M^r de St. Germain pour les critiques bienveillantes qu'il a bien voulu m'adresser sur certains points de ce travail, et dont j'ai tiré parti dans cet ouvrage.

A. Hermann
professeur de Mathématiques

Digitized by Google

ÉNONCÉS

DES

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS D'ADMISSION

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

au concours de 1869

CLASSÉES MÉTHODIQUEMENT

SOLUTIONS

DES

PRINCIPALES DIFFICULTÉS

RELATIVES AUX EXAMENS

Par M. A. HERMANN

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

Biblioteca Nazionale NAPOLI

Premier Fascicule : *Arithmétique*

BIBLIOTECA PROVINCIALE di NAPOLI

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER

Quai des Augustins, 55.

Octobre 1869

Digitized by Google

FONDO PROVINCIA

NAZIONALE
BIBLIOTECA
B. Prov.
Miscellanea
D
8
52
VITTORIO EM. III
NAPOLI

BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio 8

Palchetto 6
Num.° d'ordine 42

15984

Digitized by Google

HERMANN

SOLUTIONS DIFFICULTÉS

VITTORIO EM

Digitized by Google